ÜBER DEN ABSOLUTBETRAG STETIGER LINEARER OPERATOREN UND SEINE ANWENDUNG AUF ERGODISCHE ZERLEGUNGEN

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG
DES DOKTORGRADES
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN
FAKULTÄT DER GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
ZU GÖTTINGEN

VORGELEGT VON
ULRICH KRENGEL
AUS GÖTTINGEN

GÖTTINGEN 1963

1964

Referent: Prof. Dr. Konrad Jacobs
Korreferent: Prof. Dr. Wilhelm Maak
Tag der mündlichen Prüfung: 8.11.1964

D 7

ULRICH KRENGEL

Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen

Math. Scand. 13 (1963), 151-187

MATHEMATICA SCANDINAVICA

Ediderunt

SOCIETATES MATHEMATICÆ
DANIÆ FENNIÆ ISLANDIÆ
NORVEGIÆ SVECIÆ

Separatum

KØBENHAVN

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MATH. SCAND. 13 (1963), 151–187

ÜBER DEN ABSOLUTBETRAG STETIGER LINEARER OPERATOREN UND SEINE ANWENDUNG AUF ERGODISCHE ZERLEGUNGEN

ULRICH KRENGEL[1]

Einleitung.

In der Ergodentheorie untersucht man Operatoren T in reellen oder komplexen Banachräumen X, in denen gewöhnlich ein positiver Kegel X^+ ausgezeichnet und den Elementen $f \in X$ ein Absolutbetrag $|f| \in X^+$ zugeordnet ist, z. B. in $X = L_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$. Viele Resultate sind zunächst für den Spezialfall positiver Operatoren bewiesen worden, d. h. für Operatoren, die den positiven Kegel in sich abbilden. Wir nennen hier: 1) den individuellen Ergodensatz (vgl. Dunford–Schwartz [7], [8], Chacon–Ornstein [6]) und 2) den Satz über ergodische Zerlegungen (Jacobs [10]). Beide Resultate gestatten auch eine Formulierung für i.a. nicht positive Operatoren. Für den Beweis derartiger Verallgemeinerungen haben Dunford u. Schwartz [8] einen Weg gewiesen: Man versucht, den allgemeinen Fall auf den positiven zu reduzieren, indem dem Operator T ein positiver Operator $|T|$, sein Absolutbetrag, zugeordnet wird, der mit T so eng zusammenhängt, daß sich die zu beweisenden Aussagen von $|T|$ auf T übertragen.

Mit dieser Methode bewiesen Dunford u. Schwartz die Fastüberall-Konvergenz von $(1/n)\sum_{k=1}^{n-1} fT^k$ für $f \in L_1$ und beliebige Operatoren T in L_1, die außer der L_1-Norm auch die L_∞-Norm kontrahieren. Chacon u. Krengel [5] zeigten, daß sich $|T|$ auch konstruieren läßt, wenn T nur die L_1-Norm kontrahiert, und Chacon [4] hat damit die bisher allgemeinste Form des individuellen Ergodensatzes bewiesen. Diese umfaßt auch die Version von Chacon–Ornstein [6] des Ergodensatzes sowie deren in Abschnitt 9 beschriebene Ausdehnung auf beliebige Operatoren mit Hilfe von $|T|$.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine systematische Untersuchung der Zuordnung $T \to |T|$ für lineare stetige Operatoren T zwischen komplexen Banachräumen mit positivem Kegel (sog. (Ko,B)-Räumen).

Eingegangen am 4. Oktober, 1963.

[1] Die vorliegenden Untersuchungen wurden als Dissertation bei der Universität Göttingen eingereicht. (Satz 3.3 ist jedoch später zugefügt worden.)

Die früheren Resultate von Dunford–Schwartz und Chacon–Krengel ergeben sich als Spezialfall (vgl. Sätze 3.2 und 4.1).

Dabei wird der Übergang zu reellen Banachräumen i.a. nicht eigens erwähnt. Im reellen Fall ergeben sich Berührungspunkte mit Arbeiten von F. Riesz [16] und L. Kantorovitch [14] über Verbandsaussagen in einigen Räumen von reellen Operatoren. (Auf Letztere wurde ich erst nach Abschluß dieser Arbeit aufmerksam. Sie behandelt vor allem in Ordnungstopologien stetige Operatoren, enthält aber bereits das wichtige Corollar 4.1.)

Als Anwendung erhalten wir in Abschnitt 10 die ergodische Zerlegung stetiger Operatoren im reellen oder komplexen L_1 ohne Positivitätsforderung, teils durch Reduktion auf die oben unter 2) erwähnte Aussage, teils durch direkte Einführung von $|T|$ in die für 2) gegebenen Beweise.

In Abschnitt 1 fassen wir die wichtigsten natürlichen Forderungen an X und Y zum Begriff des (Ko,B)-Raumes (im reellen Fall: des (B,V)-Raumes = Banachverbandes mit $\||f|\| = \|f\|$) zusammen und zählen Beispiele auf. Abschnitt 2 stellt nur den Zusammenhang mit den Verbandsaussagen her: Die stetigen linearen Operatoren zwischen (B,V)-Räumen X und Y bilden einen bedingt vollständigen Banachverband, wenn Y bedingt vollständig ist — ein bis auf die Stetigkeitsbedingung bekanntes Resultat. Dieser Satz gibt Anlaß zur Definition der Majorisierbarkeit von Operatoren. Aus ihr folgt für Räume Y, deren Realteil ein bedingt vollständiger Banachverband ist, die Existenz von $|T|$, nicht dagegen z. B. für $Y = C(\Omega)$.

Im dritten Abschnitt zeigen wir die Äquivalenz dreier Darstellungen von $|T|$. Die nützlichste erste ähnelt der Konstruktion bei Chacon–Krengel, ist aber nicht auf die spezielle Struktur von L_1 angewiesen, im reellen Fall ist sie bei Kantorovitch angedeutet. Die zweite hat die dem Ansatz von Dunford–Schwartz entsprechende Gestalt (Satz 3.2), die dritte zeigt, daß sich der Absolutbetrag $|T|$ wie der von $f \in X$ bilden läßt. (Satz 3.3).

Im vierten Abschnitt werden Majorisierbarkeits-Kriterien gegeben: Es zeigt sich, daß es hinreichend ist, wenn X die Eigenschaft (L) hat, d. h. für $f,g \in X^+$ stets $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ gilt, oder aber wenn Y eine Einheit 1 besitzt, d. h. ein Element $1 \geqq 0$ mit den Eigenschaften: a) $\|1\| = 1$ und b) für $h \in Y$ mit $\|h\| \leqq 1$ ist $|h| \leqq 1$. Hier zeigt sich, daß sich auch die Theorie der Totalvariation komplexer Maße einordnet, die wir dazu als lineare Funktionale auf einem passenden L_1 auffassen.

Im fünften Abschnitt wird gezeigt, daß Operatoren in $L_2 = X = Y$ i. a. nicht majorisierbar sind: Im reellen L_2 bilden die stetigen Operatoren

genau dann einen Verband, wenn der L_2 endlich-dimensional ist. Im sechsten Abschnitt schliessen wir von der Majorisierbarkeit von T auf die des dualen Operators T^* und beweisen in einigen Fällen $|T^*| = |T|^*$.

Von da an legen wir zugrunde, daß X die Eigenschaft (L) hat. Wir zeigen, daß für vollstetige Operatoren T auch $|T|$ vollstetig ist. Weiter geben wir eine Klasse von Operatoren T an, für die sich $|T|$ finit bestimmen läßt, und die im Raum aller stetigen Operatoren von X nach Y dicht in der starken Operatortopologie ist. Allerdings gilt für den Übergang $T \to |T|$ nur monotone Stetigkeit in dieser Topologie.

Ich danke Herrn Prof. K. Jacobs vielmals für sein Interesse an der Arbeit und äußerst wertvolle Anregungen.

1. Definitionen und Hilfsmittel.

H sei eine halbgeordnete Menge, $\leqq$ bezeichne die Halbordnung. Existiert zu je zwei Elementen $f, g \in H$ eine kleinste obere Schranke $f \vee g$ und eine größte untere Schranke $f \wedge g$, so heißt H ein *Verband*. H heißt ein *bedingt vollständiger Verband*, wenn zu jeder nach oben beschränkten Teilmenge $H_0 \subseteqq H$ eine kleinste obere Schranke (sup) und zu jeder nach unten beschränkten Teilmenge $H_0 \subseteqq H$ eine größte untere Schranke (inf) existiert. (Vgl. Jacobs [9, S. 155]).

Ist ein Verband H zugleich ein reeller linearer Raum und die Halbordnung gegen Translation und Multiplikation mit positiven Zahlen invariant, so heißt H ein *Vektorverband*. In diesem sei $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ und $|f| = f \vee (-f)$. Es gilt $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ \wedge f^- = 0$, $f + g = (f \vee g) + (f \wedge g)$ und die Gleichungen $a \wedge b = 0$ und $a \wedge c = 0$ implizieren zusammen $a \wedge (b + c) = 0$ (vgl. Birkhoff [1, S. 219–220]).

Für beliebige halbgeordnete lineare Räume X sei $X^+ = \{f \in X : f \geqq 0\}$.

Ist ein Vektorverband H zugleich ein reeller Banachraum, gilt $\|f\| \leqq \|g\|$ für $f, g \in H^+$ und $f \leqq g$, und gilt für gegen f bzw. g normkonvergente Folgen $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ mit $f_n \leqq g_n$ stets $f \leqq g$, so heißt H *Banachverband*. Alle Verbandsoperationen sind dann stetig. Wir nehmen durchgehend symmetrische Normen: $\|f\| = \||f|\|$ an und nennen Banachverbände mit dieser Eigenschaft (B, V)-Räume.

Ein komplexer Banachraum X heiße (Ko, B)-Raum oder auch komplexe Hülle des Banachverbandes $H = \mathrm{Re}(X)$, wenn er folgende Eigenschaften hat:

(1.1) $\mathrm{Re}(X) = H \subseteqq X$.

(1.2) Jedes $f \in X$ ist eindeutig darstellbar als Summe $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ mit $\mathrm{Re}(f) \in H$, $\mathrm{Im}(f) \in H$.

(1.3) Jedem Element $f \in X$ ist ein Element $|f| \in H^+$ so zugeordnet,

daß $|f|$ der im Banachverband H definierte Absolutbetrag ist, wenn $f \in H$.

Es gelte ferner:

(1.4) $\|f\| = \||f|\|$, $f \in X$.

(1.5) Die Abbildungen $f \to |f|$ und $f \to \mathrm{Re}(f)$ sind normstetig.

(1.6) Es ist $|f| = \sup_{|a|=1} \mathrm{Re}(af)$.

(1.7) Der Raum $\mathrm{Tr}(X) = \{f \in X : f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, a_i komplex, $f_i \in H^+$ und $f_i \wedge f_k = 0$, $i \neq k\}$ ist normdicht in X.

Aus (1.6) folgt für $f \in \mathrm{Tr}(X)$ die Formel $|f| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| f_i$.

(B, V)-Räume besitzen alle wichtigen Struktureigenschaften der (Ko, B)-Räume in reeller Gestalt und daher formulieren wir Definitionen und Sätze meist nur für (Ko, B)-Räume, obwohl sich alles auf (B, V)-Räume überträgt. Wir sagen, die komplexe Hülle X von H habe die Eigenschaft:

(bv): wenn H ein bedingt vollständiger Verband ist.

(L): wenn $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ für $f, g \in H^+ = X^+$ gilt.

(M): wenn $\|f \vee g\| = \max\{\|f\|, \|g\|\}$ für $f, g \in H^+$ gilt.

(1): wenn X^+ eine *Einheit 1* enthält, d. h. ein Element $1 \in X^+$ mit $\|1\| = 1$, für das $|f| \leqq 1$ für diejenigen $f \in X$ ist, für die $\|f\| \leqq 1$ ist.

(mK): wenn in H der Satz von der *monotonen Konvergenz* gilt.

Erläuterung zu (mK): Ist I eine aufsteigend gefilterte Indexmenge, d. h. eine Moore–Smith-Folge mit der Halbordnung $\leqq$, und ist jedem $i \in I$ ein $f_i \in H$ zugeordnet, so nennen wir das System $\{f_i, i \in I\}$ monoton wachsend, wenn für $i_1 \leqq i_2$ stets $f_{i_1} \leqq f_{i_2}$ ist. Wir sagen, daß in H der Satz von der monotonen Konvergenz gilt, wenn zu jedem normbeschränkten monoton wachsenden System $\{f_i, i \in I\}$ ein $f \in H$ existiert, das die Eigenschaft hat: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $i_\varepsilon \in I$ derart, daß $\|f - f_i\| < \varepsilon$ für $i \geqq i_\varepsilon$. Dann folgt $f \geqq f_i$ für $i \in I$ und $\|f\| \leqq \sup\{\|f_i\|\}$.

Aus (mK) folgt (bv): Ist etwa $f_k \leqq h$ für $k \in K \neq 0$ und $k_0 \in K$, so ist $f = \sup\{f_k\}$ genau dann, wenn $f = \sup\{f_k \vee f_{k_0}\}$ ist, und nach einer Translation können wir $0 \leqq f_k \leqq h$, $k \in K$, annehmen. I sei das aufsteigend gefilterte System der endlichen Teilmengen $i = \{k_1, \ldots, k_n\}$ von K, $i_1 \leqq i_2$ ist in I durch $i_1 \subseteqq i_2$ definiert. Wir bilden das monoton wachsende und durch $\|h\|$ normbeschränkte System

$$g_i = f_{k_1} \vee \ldots \vee f_{k_n}.$$

Ist $f = \lim_{i \in I} g_i$, dann ist $f \geqq g_i$ für alle i, also $\geqq f_k$, $k \in K$. Umgekehrt zeigt man durch Auswahl einer konvergenten Folge von g_i daß $f \leqq h$, und, da h eine beliebige Schranke war, folgt $f = \sup\{f_k\}$.

Um (mK) nachzuweisen, braucht man in $\{f_i, i \in I\}$ stets nur solche $i \in I$ zu betrachten, die größer als ein festes $i_0 \in I$ sind und nach einer

Translation kann man dann stets $f_i \geqq 0$ annehmen. So zeigt man, daß (mK) und also auch (bv) aus (L) folgt.

Einen (Ko,B)-Raum mit den Eigenschaften (1) und (bv) nennen wir $(Ko,B,1,bv)$-Raum und entsprechend sind andere Bezeichnungen zu verstehen, etwa (Ko,B,L)-Raum oder (B,V,mK)-Raum. Dabei verwenden wir statt der Ausdrücke (B,V,L)-Raum und (B,V,M)-Raum in Anlehnung an Kakutani [13] auch die Bezeichnungen (L)-Raum und (M)-Raum.

Beispiel 1. Der Raum (Ω,B,m) sei ein Maßraum und $L_p = L_p(m)$ der komplexe $L_p(\Omega,B,m)$, $1 \leqq p \leqq \infty$. Es ist:

(1a) L_1 ein (Ko,B,L)-Raum;

(1b) L_p ein (Ko,B,mK)-Raum, $1 \leqq p < \infty$;

(1c) L_∞ ein $(Ko,B,1,M)$-Raum und für σ-endliches m gilt außerdem (bv).

In dieser Arbeit sind Gleichungen und Ungleichungen zwischen Funktionen aus L_p, $1 \leqq p \leqq \infty$, stets als fastüberall geltend zu verstehen.

Beweishinweise: Bezüglich der (in L_p trivialen) Verbandsstruktur und der Banachraumstruktur verweise ich — zugleich für die folgenden Beispiele auf Dunford–Schwartz [7]. Die Eigenschaften (L) in (1a) und (M) in (1c) folgen aus den Definitionen. Einheit 1 in L_∞ ist die Konstante 1. Bezüglich (mK) in (1b) siehe Bourbaki [2, Chap. IV., 3.6]. Ist m σ-endlich, so folgt (bv) in (1c) aus Dunford–Schwartz [7, Satz IV, 8.23]. (Ein Gegenbeispiel, wenn m nicht σ-endlich ist: $\Omega = [0,1]$, $B =$ Borelsche Mengen, m: Jeder Punkt erhält die Masse 1. Sei $f_x(\omega) = \chi_{\{x\}}(\omega)$. Ist A nicht Borel-meßbar, so existiert nicht $\sup_{x \in A} f_x$ in L_∞.) Ist eine Folge f_k im reellen L_p, $1 \leqq p \leqq \infty$, durch $h \in L_p$ beschränkt: $h \geqq f_k$, so führt Supremumsbildung nicht aus dem Bereich der meßbaren Funktionen heraus und es ist $\sup f_k \in L_p$, wobei $\sup f_k$ punktweise gebildet wird — unabhängig von den Repräsentanten, da nur abzählbar viele f_k berücksichtigt werden. So beweist man (1.6), indem $\sup_{|a|=1} \mathrm{Re}(af)$ nur über solche a erstreckt wird, die einen rationalen Realteil haben. Da solche a dicht im Einheitskreis liegen, erhält man so bereits das volle Supremum. (1.7) gilt, da sogar die Treppenfunktionen normdicht liegen. (1.5) folgt aus

$$\big||f| - |g|\big| \leqq |f-g| \quad \text{und} \quad |\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(g)| \leqq |f-g| \,.$$

Beispiel 2. Der Raum $K(B)$ der *komplexen Ladungsverteilungen*, d. h. der verallgemeinerten Maße auf (Ω,B) ist ein (Ko,B,L)-Raum. (Jacobs [9, S. 165]); denn zu $h \in K(B)$ kann man die Totalvariation $|h| \in K(B)$ bestimmen. Setzt man $\|h\| = |h|(\Omega)$ und $|h| = m$, so hat h nach dem Satz

von Radon–Nikodym die Darstellung $h(E)=\int_E f dm$, und diese benutzt man, um den Beweis auf Beispiel 1 zu reduzieren.

Beispiel 3. Ist Ω eine beliebige Punktmenge, so ist $M(\Omega)$, der Raum der beschränkten komplexen Funktionen auf Ω, ein $(Ko,B,1,bv,M)$-Raum mit $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$, denn man kann $M(\Omega)$ als speziellen Raum L_∞ auffassen und (bv) gilt, da man punktweise das Supremum bilden kann.

Beispiel 4. Ist Ω ein topologischer Raum, so ist der Raum $C(\Omega)$ der reellen stetigen Funktionen auf Ω ein $(B,V,M,1)$-Raum, wenn $\|f\|$ wie in Beispiel 3 gebildet ist. Der zugehörige komplexe Raum ist im allgemeinen kein (Ko,B)-Raum.

Andere Räume werden in dieser Arbeit nicht benötigt. Es lassen sich jedoch noch zahlreiche Beispiele nennen, u. a. der Raum der Funktionen von beschränkter Totalvariation in einem Intervall als weiterer (Ko,B,L)-Raum und der Raum der komplexen Nullfolgen $\{x_n\}$ mit $\|\{x_n\}\|=\sup|x_n|$ als (Ko,B,bv,M)-Raum ohne Einheit (vgl. Dunford–Schwartz [7, S. 238]).

Positive Operatoren. Sind X und Y (Ko,B)-Räume, so nennen wir einen linearen Operator T von X nach Y positiv, in Zeichen $T\geqq 0$, wenn $fT\in Y^+$ für alle $f\in X^+$ ist. Eine Halbordnung wird erklärt, indem wir für zwei Operatoren T_1, T_2, $T_1\geqq T_2$ statt $(T_1-T_2)\geqq 0$ schreiben. T heißt reell, wenn für $f\in \mathrm{Re}(X)$ stets $fT\in \mathrm{Re}(Y)$ ist.

Stetige lineare Operatoren T von X nach Y sind lineare Operatoren mit endlicher Norm:

$$\|T\| = \sup_{\|f\|\leqq 1}\|fT\| . \tag{1.8}$$

Ist (Ω,B,m) ein Maßraum, $X=L_p$ und $Y=L_p$, und bedeutet $\|f\|_q$ die Norm in L_q von $f\in L_p\cap L_q$, $1\leqq p,\ q\leqq\infty$, so schreiben wir

$$\|T\|_q = \sup_{\|f\|_q\leqq 1}\|fT\|_q , \tag{1.9}$$

$\|\cdot\|$ anstelle von $\|\cdot\|_1$ und, wenn nur eine Norm betrachtet wird, auch anstelle von $\|\cdot\|_p$.

Sind X und Y (Ko,B)-Räume und ist ein Operator T auf X^+ definiert, dort additiv und *positiv homogen*, d. h. gilt $(af)T=a(fT)$ für $a\geqq 0$ und $f\in X^+$, ist ferner $fT\in Y^+$, $f\in X^+$, und gilt $\|fT\|\leqq K\|f\|$ für eine Konstante $K<\infty$, so läßt sich T zu einem linearen stetigen positiven Operator auf X fortsetzen: Ist $h=h_1-h_2=h_1'-h_2'$, $h_k,h_k'\in X^+$, so ist $h_1T-h_2T=h_1'T-h_2'T$, da T additiv ist, und wir können dies $=hT$ setzen. Ist $f=h_r+ih_i$, $h_r,h_i\in \mathrm{Re}(X)$, so setzen wir $fT=h_rT+i(h_iT)$. Dann ist T linear. Es gilt

$$\|fT\| = \|h_r^+T - h_r^-T + ih_i^+T - ih_i^-T\| \leqq 4K\|f\| .$$

T ist also stetig. Es gilt aber sogar

$$\|T\| \leqq K .$$

Um dies zu zeigen, bemerken wir, daß aus (1.6) und

$$\sup\{f_i\} + \sup\{g_i\} \geqq \sup\{f_i + g_i\}$$

folgt, daß für $f, g \in X$ stets

$$|g+h| \leqq |g| + |h| \tag{1.10}$$

gilt. Ist $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \mathrm{Tr}(X)$, so ist

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i T \right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_i f_i T| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| f_i T$$

und also

$$\|fT\| = \left\| \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i T \right| \right\| \leqq \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| f_i T \right\|$$

$$\leqq \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| f_i \right\| K = \|f\| K .$$

Da $\mathrm{Tr}(X)$ dicht in X ist, erhalten wir $\|T\| \leqq K$.

Bemerkung. Die Bedingung (1.7) spielt — wie wir sehen — nicht eine ausschlaggebende Rolle und wir verwenden sie nur, um eine geschlossene Darstellung zu erreichen. Später wird sie wesentlich nur noch zum Beweis von Lemma 3.1 benötigt. Im Bildraum Y des Operators ist sie zur Durchführung der Theorie völlig entbehrlich.

2. Das Supremum beschränkter Mengen von Operatoren.

Lemma 2.1. *Ist X ein Vektorverband und sind*

$$Z_1(f) = \{f_{11}, \ldots, f_{1r}\} \quad \text{und} \quad Z_2(f) = \{f_{21}, \ldots, f_{2s}\}$$

zwei Zerlegungen von $f \in X^+$, das heißt n-tupel $\{f_1, \ldots, f_n\}$ mit $f_i \in X^+$ und $\sum_{i=1}^{n} f_i = f$, so existiert zu diesen eine Verfeinerung, d. h. eine Zerlegung $\{g_{11}, \ldots, g_{rs}\}$ mit $\sum_{i=1}^{r} g_{ik} = f_{2k}$ und $\sum_{k=1}^{s} g_{ik} = f_{1i}$.

Für $s = 1$ ist dies trivial, für $s = 2$ hat es Kantorovitch [14, S. 220] bewiesen und für beliebiges s folgt es durch Induktion. Die Zerlegungen $Z(f)$ eines Elements $f \in X^+$ bilden also bezüglich der durch den Begriff der Verfeinerung bestimmten Halbordnung ein gefiltertes System $\mathfrak{Z}(f)$.

Satz 2.1. *Der Banachraum H aller stetigen linearen Operatoren von einem (B, V)-Raum X in einen (B, V, bv)-Raum Y ist ein bedingt vollständiger Verband.*

BEWEIS. Es sei $T_0 \in H$, L eine nicht leere Indexmenge und $T_0 \geqq T_\lambda \in H$, $\lambda \in L$. Wir konstruieren $\tilde{T} = \sup_{\lambda \in L} T_\lambda$. Für $f \in X^+$, eine Zerlegung

$$Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$$

und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \subseteqq L$ sei

$$Q\big(Z(f), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) = \sum_{i=1}^{k} f_i T_{\lambda_i} \leqq f T_0 \tag{2.1}$$

und

$$f\tilde{T} = \sup_{\substack{Z(f) \in \mathfrak{Z}(f) \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \subseteqq L}} Q\big(Z(f), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) . \tag{2.2}$$

Da Y ein (B, V, bv)-Raum ist, ist $f\tilde{T} \in Y$. Aus der Definition folgt, daß $\tilde{T}$ auf X^+ positiv homogen ist.

Wir zeigen, daß für $f, g \in X^+$

$$(f+g)\tilde{T} = f\tilde{T} + g\tilde{T}$$

gilt: Ist $Z'(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ und $Z''(g) = \{g_1, \ldots, g_j\}$, so bilden wir

$$Z(f+g) = \{f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_j\} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Q\big(Z'(f), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) + Q\big(Z''(g), \mu_1, \ldots, \mu_j\big) &= Q\big(Z(f+g), \lambda_1, \ldots, \mu_j\big) \\ &\leqq (f+g)\tilde{T} , \end{aligned}$$

und daraus folgt $f\tilde{T} + g\tilde{T} \leqq (f+g)\tilde{T}$. Ist aber

$$Z(f+g) = \{h_1, \ldots, h_k\} \quad \text{und} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

vorgegeben, so bilden wir eine Verfeinerung

$$\{f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$$

von $Z(f+g)$ und $\{f, g\}$. Setzen wir $Z'(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ und $Z''(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, so ist

$$\begin{aligned} Q\big(Z(f+g), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) &= Q\big(Z'(f), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) + Q\big(Z''(g), \lambda_1, \ldots, \lambda_k\big) \\ &\leqq f\tilde{T} + g\tilde{T} \end{aligned}$$

und also $(f+g)\tilde{T} \leqq f\tilde{T} + g\tilde{T}$. Da mithin $\tilde{T}$ auf X^+ additiv ist, können wir es durch $f\tilde{T} = f^+\tilde{T} - f^-\tilde{T}$ zu einem auf ganz X definierten linearen Operator $\tilde{T}$ fortsetzen.

Dieser Operator $\tilde{T}$ ist stetig. Um dies zu zeigen, betrachten wir statt T_λ nun $T_\lambda' = T_\lambda - T_0$. Wir erhalten

$$T_\lambda' \leqq \tilde{T}' = \tilde{T} - T_0 \leqq 0 .$$

Für beliebiges festgewähltes $\lambda \in L$ und $f \in X$ ist

$$f^+T_\lambda' \leqq f^+\tilde{T}' \leqq 0 \quad \text{und} \quad f^-T_\lambda' \leqq f^-\tilde{T}' \leqq 0\,.$$

Aus der Monotonie der Norm in Y und X folgt

$$\|f^+\tilde{T}'\| \leqq \|f^+T_\lambda'\| \quad \text{und} \quad \|f^-\tilde{T}'\| \leqq \|f^-T_\lambda'\|\,,$$

ferner

$$\|f^+\| \leqq \||f|\| = \|f\| \quad \text{und} \quad \|f^-\| \leqq \||f|\| = \|f\|\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|f\tilde{T}'\| \leqq \|f^+\tilde{T}'\| + \|f^-\tilde{T}'\| \leqq 2\|T_\lambda'\|\,\|f\|\,.$$

Aus der Stetigkeit von $\tilde{T}'$ und T_0 folgt die von $\tilde{T}$.

Da $T_\lambda \leqq \tilde{T} \leqq T_0$ für jedes $\lambda \in L$ gilt, T_0 aber eine beliebige Schranke der T_λ war, ist $\tilde{T} = \sup_{\lambda\in L} T_\lambda$.

Bemerkung. Die eben angewandte Methode ist ohne Stetigkeitsüberlegungen schon von Kantorovitch [14, S. 221] zum Beweis eines anderen Resultats entwickelt worden, zugleich von Riesz [16, S. 179], für positive Operatoren, ebenfalls ohne Stetigkeitsbetrachtungen.

Definition 2.1. Ein stetiger linearer Operator von einem (Ko,B)-Raum, bzw. (B,V)-Raum X in einen (Ko,B)-Raum, bzw. (B,V)-Raum Y heißt *majorisierbar*, wenn für mindestens einen positiven stetigen linearen Operator $\tilde{T}$

$$f\tilde{T} \geqq |fT|, \qquad f \in X^+\,, \tag{2.3}$$

gilt. $\tilde{T}$ heißt *Majorante* von T.

Die majorisierbaren Operatoren bilden einen linearen Raum. Ist X ein (B,V)-Raum und Y ein (B,V,bv)-Raum, so bilden sie nach Satz 2.1 einen Verband. Umgekehrt sind reelle Operatoren, die Differenz zweier positiver Operatoren sind, stets majorisierbar. Beispiel 5 in Abschnitt 4 wird u. a. zeigen, daß für einen majorisierbaren Operator T von einem (B,V)-Raum X in einen (B,V)-Raum Y nicht notwendig $T^+ = T \vee 0$ existiert, daß also in Satz 2.1 die Bedingung (bv) für Y wesentlich ist.

3. Die Darstellungen des Absolutbetrages $|T|$ von T.

Ist T ein majorisierbarer Operator von einem (B,V)-Raum in einen (B,V,bv)-Raum, so können wir Satz 2.1 anwenden und $T \vee (-T) = |T|$ und $T \vee 0 = T^+$ so bilden, daß für $f \in X^+$

$$f|T| = \sup_{0 \leqq f' \leqq f} \{f'T - (f-f')T\} \tag{3.1}$$

und

$$fT^{+} = \sup_{0 \leqq f' \leqq f} f'T \tag{3.2}$$

ist. (Kantorovitch [14, S. 222]). Sei nun T ein majorisierbarer Operator von einem (Ko, B)-Raum X in einen (Ko, B, bv)-Raum Y und T_0 eine Majorante. Zu $f \in X^{+}$ und

$$Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$$

bilden wir

$$\begin{aligned} Q^{r+}(Z(f), T) &= \sum_{i=1}^{k} \left(\mathrm{Re}(f_i T) \vee 0\right) \leqq fT_0 , \\ Q^{r-}(Z(f), T) &= \sum_{i=1}^{k} \left(\mathrm{Re}(-f_i T) \vee 0\right) \leqq fT_0 , \\ Q^{(\sim)}(Z(f), T) &= \sum_{i=1}^{k} |f_i T| \leqq fT_0 . \end{aligned} \tag{3.3}$$

$(*)$ bezeichne ein beliebiges der Zeichen $(\sim), r+, r-$. Bei Verfeinerung von $Z(f)$ ist $Q^{(*)}(Z(f), T)$ monoton wachsend; denn ist $f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$, so ist

$$\mathrm{Re}(f_i T) \vee 0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}(f_{ij} T)\right) \vee 0 \leqq \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{Re}(f_{ij} T) \vee 0\right) ,$$

ebenso

$$\mathrm{Re}(-f_i T) \vee 0 \leqq \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{Re}(-f_{ij} T) \vee 0\right)$$

und

$$|f_i T| \leqq \sum_{j=1}^{n} |f_{ij} T| .$$

Da in Y^{+} das Supremum beschränkter Mengen existiert, definieren wir

$$fT^{(*)} = \sup_{Z(f) \in \mathfrak{Z}(f)} Q^{(*)}(Z(f), T) \leqq fT_0 . \tag{3.4}$$

$T^{(*)}$ ist auf Y^{+} positiv homogen und sogar additiv: Sei $f, g \in X^{+}$. Für vorgegebenes $Z(f)$ und $Z(g)$ ist $Z(f+g) = Z(f) \cup Z(g)$ so fein, daß

$$Q^{(*)}(Z(f), T) + Q^{(*)}(Z(g), T) = Q^{(*)}(Z(f+g), T) \leqq (f+g)T^{(*)}$$

gilt. Es folgt $fT^{(*)} + gT^{(*)} \leqq (f+g)T^{(*)}$. Ist $Z(f+g)$ vorgegeben, so verfeinern wir es nach Lemma 2.1 mit $\{f, g\}$ zu $Z'(f+g) = Z'(f) \cup Z'(g)$. Dann ist

$$\begin{aligned} Q^{(*)}(Z(f+g), T) &\leqq Q^{(*)}(Z'(f+g), T) \\ &= Q^{(*)}(Z'(f), T) + Q^{(*)}(Z'(g), T) \\ &\leqq fT^{(*)} + gT^{(*)} . \end{aligned}$$

Daraus folgt $(f+g)T^{(*)} \leqq fT^{(*)} + gT^{(*)}$ und also

$$(f+g)T^{(*)} = fT^{*} + gT^{*} .$$

Für $f \in X^+$ ist $\|fT^{(*)}\| \leqq \|fT_0\| \leqq \|f\| \|T_0\|$, und $T^{(*)}$ läßt sich daher zu einem linearen Operator auf X mit $\|T^{(*)}\| \leqq \|T_0\|$ fortsetzen. Konstruiert man im reellen Fall $T^{(*)}$ ebenso, so gilt:

SATZ 3.1. *Ist T ein majorisierbarer Operator von einem (B, V)-Raum X in einen (B, V, bv)-Raum Y, so ist $T^+ = T^{r+}$, $T^- = T^{r-}$ und $|T| = T^{(\sim)}$.*

BEWEIS. Nach Konstruktion ist $T^{r+} \geqq 0$ und $T^{r+} \geqq T$. Ist $S \geqq 0$ und $S \geqq T$, so ist

$$Q^{r+}(Z(f), T) = \sum_{i=1}^{k} (f_i T)^+ \leqq \sum_{i=1}^{k} (f_i S)^+ = fS$$

und also $T^{r+} \leqq S$, das heißt $T^+ = T^{r+}$. Ebenso zeigt man $T^{r-} = T^-$. Aus

$$|f_i T| = (f_i T)^+ + (-f_i T)^+$$

folgt $T^{(\sim)} = T^{r+} + T^{r-} = |T|$.

DEFINITION 3.1. Für majorisierbare Operatoren von einem (Ko, B)-Raum X in einen (Ko, B, bv)-Raum Y setzen wir: $|T| = T^{(\sim)}$ und nennen $|T|$ den *Absolutbetrag* des Operators T.

BEMERKUNGEN. (1) Im Fall $X = L_1(\Omega, B, m)$ ist $|T|$ auch bei Beschränkung auf solche Zerlegungen $\{f_1, \ldots, f_k\} = \{f\chi_{A_1}, \ldots, f\chi_{A_k}\}$, die aus einer meßbaren Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_k\}$ von Ω hervorgehen, konstruierbar (R. V. Chacon and U. Krengel [5]). Satz 3.2 wird zeigen, daß der dort konstruierte Operator $|T|$ identisch mit dem dieser Arbeit ist.

(2) Gegenüber der in Satz 2.1 beschriebenen Konstruktion von $|T|$ hat die von $T^{(\sim)}$ außer dem Vorteil der Übertragbarkeit ins Komplexe noch den folgenden: Ist Y ein (Ko, B, mK)-Raum, so gilt, wenn $Z(f)$ das aufsteigend gefilterte System $\mathfrak{Z}(f)$ durchläuft,

$$\|fT^{(\sim)} - Q^{(\sim)}(Z(f), T)\| \to 0 .$$

Wir können in diesem Fall also schreiben

$$f|T| = \lim_{Z(f) \in \mathfrak{Z}(f)} Q^{(\sim)}((Zf), T) \quad \text{(Norm)} . \tag{3.5}$$

Nun bereiten wir eine weitere Darstellung von $|T|$ vor:

LEMMA 3.1. *Sei T_0 eine Majorante des den (Ko, B)-Raum X in den (Ko, B)-Raum Y abbildenden Operators T. Dann ist für $|g| \leqq f \in X^+$ stets $|gT| \leqq fT_0$, und ist Y ein (Ko, B, bv)-Raum, so ist $|T| \leqq T_0$ auch eine Majorante von T.*

BEWEIS. Sei $g \in X$ und für $h_k \in X$ gelte $\|h_k - g\| \to 0$ für $k \to \infty$. Sei ferner $h_k = \sum_{i=1}^{n(k)} a_{ik} h_{ik}$, $|a_{ik}| = 1$, $h_{ik} \in X^+$ und $h_{ik} \wedge h_{jk} = 0$, $i \neq j$, also $h_k \in \mathrm{Tr}(X)$. Bilden wir

$$g_{ik} = h_{ik} \wedge |g| \quad \text{und} \quad g_k = \sum_{i=1}^{n(k)} a_{ik} g_{ik} ,$$

so ist

$$\|h_k - g_k\| = \| |h_k| - (|h_k| \wedge |g|) \| .$$

Aus $h_k \to g$ folgt $|h_k| \to |g|$ und $|h_k| \wedge |g| \to |g|$, also $\|h_k - g_k\| \to 0$. Es gibt demnach zu jedem $g \in X$ Elemente $g_k \in \mathrm{Tr}(X)$ mit $g_k \to g$ und $|g_k| \leqq |g|$. Nun ist

$$|g_k T| = \left| \sum_{i=1}^{n(k)} a_{ik} g_{ik} T \right| \leqq \sum_{i=1}^{n(k)} |a_{ik}| \, |g_{ik} T|$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n(k)} g_{ik} T_0 \leqq |g| \, T_0 \leqq f T_0 .$$

Durch Approximation folgt $|gT| \leqq f T_0$. Die letzte Behauptung ergibt sich aus der Konstruktion von $T^{(\sim)}$.

SATZ 3.2. *Ist T ein majorisierbarer Operator von einem (Ko, B)-Raum X in einen (Ko, B, bv)-Raum Y, so ist für $f \in X^+$*

$$f|T| = \sup_{|g| \leqq f} |gT| = \sup_{|g| \leqq f} \mathrm{Re}(gT) . \tag{3.6}$$

BEWEIS. Nach Lemma 3.1 und Formel (1.6) gilt $f(T) \geqq |gT| \geqq \mathrm{Re}(gT)$ für jedes $|g| \leqq f$. Die Suprema existieren daher, und bezeichnet man die rechte Seite in (3.6) mit fT^a, so gilt $|T| \geqq T^a$. Ist $T^a \geqq |T|$ falsch, so gibt es ein $f \in X^+$ und eine Zerlegung $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$, für die

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |f_i T| - f T^a \right)^+ = p > 0 \tag{3.7}$$

ist. Wir setzen $p_0 = \frac{1}{2} p/k > 0$. Es gilt

$$|f_i T| = \sup_{|a_i|=1} \mathrm{Re}(a_i f_i T) . \tag{3.8}$$

Daher gibt es für $i = 1$ ein a_i mit $|a_i| = 1$ und

$$\left(\mathrm{Re}(a_i f_i T) - (|f_i T| - p_{i-1})\right)^+ = p_i > 0 . \tag{3.9}$$

Aus (3.8) folgt zugleich $p_i \leqq p_{i-1}$. Sukzessive bestimmen wir so $a_1, \ldots, a_k$ und $p_0 \geqq p_1 \geqq \ldots \geqq p_k > 0$. Wir zeigen für $g_1, g_2 \in \mathrm{Re}(X)$ die Beziehung

$$g_1^+ \geqq g_2^+ \quad \text{impliziert} \quad (g_1 + g_2)^+ \geqq g_2^+ . \tag{3.10}$$

Aus $g_1^+ \geqq g_2^+$ und $g_1^+ \wedge g_1^- = 0$ folgt $g_2^+ \wedge g_1^- = 0$, und zusammen mit $g_2^+ \wedge g_2^- = 0$ folgt $g_2^+ \wedge (g_1^- + g_2^-) = 0$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)^+ &= (g_1^+ + g_2^+ - (g_1^- + g_2^-))^+ \\ &\geqq (g_2^+ - (g_1^- + g_2^-))^+ = g_2^+ .\end{aligned}$$

Für $r=1$ ist (3.9) gleichbedeutend mit

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \operatorname{Re}(a_i f_i T) - \sum_{i=1}^{r} (|f_i T| - p_{i-1})\right)^+ \geqq p_r > 0 . \tag{3.11}$$

Durch Anwendung von (3.10) können wir für $r=1,\ldots,k-1$ von r auf $r+1$ schließen. Setzt man

$$h = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}(a_i f_i T) - \sum_{i=1}^{k} (|f_i T| - p_{i-1}) ,$$

so folgt also $h^+ \geqq p_k > 0$. Setzt man $g = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$, so ist $|g| \leqq \sum_{i=1}^{k} f_i = f$. Daher ist $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}(a_i f_i T) \leqq f T^a$. Wir erhalten aus (3.7) und $\sum_{i=1}^{k} p_{i-1} \leqq \frac{1}{2} p$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}h^- = (-h)^+ &= \left(\sum_{i=1}^{k} |f_i T| - \sum_{i=1}^{k} p_{i-1} - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}(a_i f_i T)\right)^+ \\ &\geqq \left(\sum_{i=1}^{k} |f_i T| - \tfrac{1}{2} p - f T^a\right)^+ \geqq \tfrac{1}{2} p .\end{aligned}$$

Dies führt zu $h^+ \wedge h^- \geqq p_k \wedge \frac{1}{2} p = p_k > 0$, also einem Widerspruch. Damit ist auch $T^a \geqq |T|$ bewiesen.

Bemerkungen. (1) Ein (3.6) entsprechendes Resultat in bedingt vollständigen Vektorverbänden ohne jede Metrik folgt sehr leicht aus (3.1). (Kantorovitch [14, S. 222].)

(2) Mit dem Ansatz (3.6) haben Dunford–Schwartz [8], [7, S. 672] gezeigt: Ist (Ω, B, m) ein σ-endlicher Maßraum, $X = L_1(\Omega, B, m) = Y$, T ein Operator von X nach Y mit $\|T\|_1 \leqq K_1 < \infty$ und $\|T\|_\infty \leqq K_\infty < \infty$, so existiert ein positiver Operator $|T|$ mit den gleichen Eigenschaften, für den $|f||T| \geqq |fT|$, $f \in L_1$, ist. Dieses folgt einfacher aus (3.6) und Satz 4.1 dieser Arbeit.

(3) Der Beweis zeigt zugleich: Will man beweisen, daß T majorisierbar ist, so kann dazu (3.6) dienen: Ist $f T^a \in Y^+$ für jedes $f \in X^+$ definiert, so ist für jedes $Z(f)$

$$Q^{(\sim)}(Z(f), T) \leqq f T^a .$$

$f T^a$ kann dann die Rolle von $f T_0$ in der Konstruktion von $f T^{(\sim)}$ übernehmen, wenn außerdem für eine Konstante $C < \infty$ und alle $f \in X^+$ die Ungleichung $\|f T^a\| \leqq C \|f\|$ gilt.

Wir wollen noch feststellen, daß $|T|$ auch die gleiche Darstellung (1.6) besitzt wie der Absolutbetrag von Elementen aus (Ko, B)-Räumen. Dazu definieren wir den Operator Ta durch

$$f(Ta) = (fT)a\ .$$

Für einen Operator S bedeute ferner $\mathrm{Re}(S)$ den Operator, der $f \in X^+$ in $\mathrm{Re}(fS)$ abbildet. Nun gilt:

Satz 3.3. *Ist T ein majorisierbarer Operator von einem (Ko, B)-Raum X in einen (Ko, B, bv)-Raum Y, so gilt*

$$|T| = \sup_{|a|=1} \mathrm{Re}(Ta)\ . \tag{3.12}$$

Beweis. Das Supremum reeller Operatoren wird nach Formel (2.2) wie in (B, V, bv)-Räumen gebildet. Die rechte Seite von (3.12) bezeichnen wir mit $]T[$. Für $f \in X^+$, gegebenes $Z(f)$ und $|a_1| = \ldots = |a_k| = 1$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f_i \,\mathrm{Re}(Ta_i) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}(f_i T a_i) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{k} |f_i T| \leqq \sum_{i=1}^{k} f_i |T| = f|T|\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt $]T[\leqq |T|$. Andererseits folgt durch Anwendung der Ungleichung

$$\begin{aligned} f]T[&= \sup_{|a_i|=1,\, Z(f)} \sum_{i=1}^{k} f_i \,\mathrm{Re}(Ta_i) \\ &\geqq \sup_{|a|=1,\, Z(f)} \sum_{i=1}^{k} f_i \,\mathrm{Re}(Ta) \\ &= \sup_{|a|=1} f\,\mathrm{Re}(Ta) = \sup_{|a|=1} \mathrm{Re}\big(a(fT)\big) = |fT| \end{aligned}$$

auf die f_i eines $Z(f)$, daß

$$\sum_{i=1}^{k} |f_i T| \leqq f]T[\ .$$

Aus (3.4) ergibt sich damit $]T[\geqq |T|$.

4. Majorisierbarkeitssätze.

In diesem Abschnitt lernen wir Paare von Räumen X und Y kennen, für die alle stetigen Operatoren von X nach Y majorisierbar sind.

Lemma 4.1. *Sei X ein (Ko, B)-Raum und Y ein (Ko, B, bv)-Raum. Sind T, T_1 und T_2 majorisierbare Operatoren von X nach Y und ist a skalar, so gilt:*

a) *Es ist* $|T| \geqq 0$; $T \geqq 0$ *impliziert* $T = |T|$.
b) $|Ta| = |T||a|$.
c) $|T_1 + T_2| \leqq |T_1| + |T_2|$.
d) $\big||T_1| - |T_2|\big| \leqq |T_1 - T_2|$.
e) *Ist zudem* $X = Y$, *so gilt* $|f||T|^n \geqq |fT^n|$.

Beweis. (a), (b) und (c) folgen unmittelbar aus der Definition (3.4) von $T^{(\sim)}$. (e) folgt durch Induktion aus Lemma (3.1). Aus (c) folgt

$$|T_1| - |T_2| \leqq |T_1 - T_2| + |T_2| - |T_2| = |T_1 - T_2|$$

und ebenso

$$|T_2| - |T_1| \leqq |T_1 - T_2| .$$

Da $|T_1|$, $|T_2|$ und $|T_1 - T_2|$ reelle majorisierbare Operatoren sind und diese einen Verband bilden, ist

$$\big||T_1| - |T_2|\big| = (|T_1| - |T_2|) \vee (|T_2| - |T_1|) \leqq |T_1 - T_2| .$$

Satz 4.1. *Ist* X *ein* (Ko, B, L)*-Raum und* Y *ein* (Ko, B, mK)*-Raum, so sind alle stetigen Operatoren von* X *nach* Y *majorisierbar und es ist* $\|\,|T|\,\| = \|T\|$. *Die Abbildung* $T \to |T|$ *ist normstetig.*

Beweis. Sei $f \in X^+$ und $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$. Wir definieren $Q^{(\sim)}(Z(f), T)$ durch (3.3) ohne Abschätzung durch fT_0. Die Eigenschaft (L) gestattet die Abschätzung

$$\|Q^{(\sim)}(Z(f), T)\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} |f_i T| \right\| \leqq \sum_{i=1}^{k} \|f_i\| \, \|T\| = \|f\| \, \|T\| .$$

Wir wissen, daß $Q^{(\sim)}(Z(f), T)$ monoton wächst, wenn $Z(f)$ das aufsteigend gefilterte System $\mathfrak{Z}(f)$ durchläuft. Wenden wir nun in Y den Satz von der monotonen Konvergenz an, so sehen wir: Es existiert

$$fT^{(\sim)} = \lim_{Z(f) \in \mathfrak{Z}(f)} Q^{(\sim)}(Z(f), T) \tag{4.1}$$

als Normlimes. Zugleich folgt

$$\|fT^{(\sim)}\| \leqq \|f\| \, \|T\| .$$

$T^{(\sim)}$ läßt sich also zu dem stetigen Operator $|T|$ mit $\|\,|T|\,\| \leqq \|T\|$ fortsetzen. $\|\,|T|\,\| \geqq \|T\|$ wiederum folgt aus Satz 3.2. Ist $\|T - T_k\| < \varepsilon$, so ist daher nach Lemma 4.1 (d)

$$\begin{aligned} \|\,|T| - |T_k|\,\| &= \|\,|\,|T| - |T_k|\,|\,\| \\ &\leqq \|\,|T - T_k|\,\| = \|T - T_k\| < \varepsilon \end{aligned}$$

und die Abbildung $T \to |T|$ normstetig.

COROLLAR 4.1. *Die stetigen linearen Operatoren T von einem (L)-Raum X in einen (B,V,mK)-Raum bilden einen (B,V,bv)-Raum.*

BEWEIS. Die Majorisierbarkeit aller Operatoren folgt wie im komplexen Fall, ebenso die Normstetigkeit des Übergangs zum Absolutbetrag. Da $T^+ = \frac{1}{2}(|T| + T)$ ist, ist auch der Übergang zu T^+ normstetig und es ist

$$\|T^+\| \leqq \tfrac{1}{2}\left(\||T|\| + \|T\|\right) = \|T\| .$$

$\||T|\| = \|T\|$ bedeutet insbesondere, daß die Norm symmetrisch ist, d. h., daß für $T_1 \wedge T_2 = 0$ stets $\|T_1 - T_2\| = \||T_1 - T_2|\| = \|T_1 + T_2\|$ ist. (bv) folgt aus Satz 2.1.

BEMERKUNG. Ein zu diesem Corollar im wesentlichen äquivalenter Satz ist schon 1940 von Kantorovitch [14, Satz 11] bewiesen worden. Davon unabhängig wurde 1962 von R. V. Chacon und dem Autor [5] ein Spezialfall von Satz 4.1 gefunden.

SATZ 4.2. *Ist X ein (Ko,B)-Raum und Y ein $(Ko,B,bv,1)$-Raum, so sind alle stetigen linearen Operatoren T von X nach Y majorisierbar. Es ist $\||T|\| = \|T\|$ und also die Abbildung $T \to |T|$ normstetig.*

BEWEIS. Ist T ein stetiger Operator und $f \in X^+$, so setzen wir

$$fT^b = \sup_{|g| \leq f} |gT|, \qquad fT^a = \sup_{|g| \leq f} \mathrm{Re}(gT) . \tag{4.2}$$

Aus

$$\|gT\| \leqq \|g\|\|T\| \leqq \|f\|\|T\|$$

folgt

$$|gT| \leqq \|f\|\|T\|1, \qquad |g| \leqq f .$$

Daher ist $fT^b \in Y^+$ definiert, und aus $|gT| = \sup_{|a|=1} \mathrm{Re}(agT)$ und $|ag| \leqq f$, wenn $|a| = 1$, ergibt sich $fT^a = fT^b$. Zugleich folgt aus $fT^a \leqq \|f\|\|T\|1$ die Abschätzung $\|fT^a\| \leqq \|f\|\|T\|$. Nach Bemerkung 3) zu Satz (3.2) genügt das, um $fT^{(\sim)}$ zu konstruieren und zwar mit

$$\|fT^{(\sim)}\| \leqq \|fT^a\| \leqq \|f\|\|T\| .$$

Wir erhalten zu T den Absolutbetrag $|T| = T^{(\sim)}$ mit $\||T|\| = \|T\|$. Wie im Beweis von Satz 4.1 folgt aus Lemma 4.1 (d) die Normstetigkeit der Abbildung $T \to |T|$.

BEMERKUNG. Da der Banachraum Y der komplexen Zahlen ein $(Ko,B,bv,1)$-Raum ist, sind insbesondere stetige lineare Funktionale majorisierbar. Als Spezialfall der Aussage von Satz 4.2 für reelle Banachverbände ergibt sich, daß die stetigen Operatoren in dem (M)-Raum $M(\Omega)$ (reell) und dem (M)-Raum $L_\infty(\Omega,B,m)$ (reell) für σ-endliches m

einen Verband bilden. Wegen der Dualität von (L)-Räumen und (M)-Räumen (Kakutani [12, S. 1021]) liegt die Vermutung nahe, daß die stetigen Operatoren in (M)-Räumen einen Verband bilden. Wir betrachten ein Gegenbeispiel, das zugleich zeigt, daß majorisierbare Operatoren T nicht einen positiven Teil T^+ zu besitzen brauchen, wenn der Bildraum Y nicht ein bedingt vollständiger Verband ist.

Beispiel 5. In dem abgeschlossenen Intervall $[-1,+1]=X=Y$ definieren wir eine monoton wachsende Folge von Funktionen

$$g_k(x) = 0 \vee (kx) \wedge 1, \quad k = 0,1,\ldots .$$

Es ist $g_k \in C(X)$ (vgl. Beispiel (4)). Es sei

$$h_0 = g_0 \equiv 0, \qquad h_k = g_k - g_{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Dann ist $h_i \geqq 0$ und $\sum_{i=0}^{n} h_i = g_n$. In $[-1,0]$ ist $g_n(x)=0$ und strebt nach 1 in $(0,+1]$. Sei ferner $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ eine streng monotone Folge in $[-1,+1]$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Für $f \in C(X)$ bilden wir

$$fT_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_{2i}) h_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f(a_{2i+1}) h_i(x)$$

und

$$fT(x) = \lim_{n\to\infty} fT_n(x) ,$$

wobei der Limes punktweise zu verstehen ist: Für $x \in [-1,0]$ ist $fT_n(x)=0$, für $\geqq 1/i$ ist $g_j(x)=1$ für alle $j \geqq i$ und also $h_j(x)=0$ für $j \geqq i+1$. Der Limes existiert also überall. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein solches $N(\varepsilon)$, daß

$$|f(a_n) - f(a)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq N(\varepsilon) .$$

Dann ist

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} f(a_{2i}) h_i(x) - \sum_{i=n+1}^{m} f(a_{2i+1}) h_i(x) \right| \leqq \sum_{i=n+1}^{m} |f(a_{2i}) h_i(x) - f(a_{2i+1}) h_i(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

für $m > n$ und jedes x. Da $fT_n(x)$ stetig ist, ist also $fT(x)$ überall stetig, das heißt T ist eine Abbildung von $C(X)$ in $C(X)$. T ist linear und es gilt $\|T\| \leqq 2$. Ist nämlich $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| = M$, so ist

$$|fT_n(x)| \leqq 2M g_n(x) \leqq 2M .$$

Bilden nun die stetigen linearen Operatoren auf $C(X)$ einen Verband, so läßt sich $T^+ = T \vee 0$ bilden. Wie kann T^+ aussehen? Auf X konstruieren wir stetige Funktionen $p_n(x)$, $n \geqq 0$, für die $0 \leqq p_n(x) \leqq 1$, $p_n(a_{2i}) = 1$, $i = 0,\ldots,n$, und $p_n(a_{2i+1}) = 0$, $i = 0,\ldots,n$, und $p_n(x) = 0$ für $x \geqq a_{2n+1}$ ist.

Dann ist für $f \geqq 0$

$$fT^+ = fp_n T^+ + f(1-p_n)T^+ \geqq fp_n T^+ \geqq fp_n T = \sum_{i=0}^{n} f(a_{2i}) h_i(x)$$

für jedes n, also

$$fT^+ \geqq \sum_{i=0}^{\infty} f(a_{2i}) h_i \,. \tag{4.3}$$

Andererseits ist $fT^-(x) = 0$ auf $[-1, 0)$. Wäre etwa $fT^-(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in [-1, 0)$ und $f \geqq 0$, also $fT^+(\lambda) > 0$, so konstruieren wir ein $q(x) \in C(X)$ mit $0 \leq q(x) \leq 1$, $q(\lambda) = 0$ und $q(x) = 1$ auf $[0, 1]$. Dann ist durch

$$(fS)(x) = (fT^+)(x)\, q(x)$$

ein stetiger linearer Operator S von $C(X)$ in $C(X)$ gegeben, der $S \geqq 0$ und $S \geqq T$ genügt, für den aber nicht $T^+ \leqq S$ gilt.

Ist nun speziell $f \equiv 1$, so erhalten wir $fT^-(x) = 0$ auf $[-1, 0)$ und aus (4.3) $fT^+(x) \geq 1$ auf $(0, 1]$, einen Widerspruch dazu, daß fT^- zu $C(X)$ gehören muß.

Dabei ist T majorisierbar durch den folgenden Operator $T^{(m)}$:

$$fT^{(m)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \{f(a_{2i})(h_i(x) + h_i(-x)) + f(a_{2i-1})(h_i(x) - h_i(-x))\} & \text{für } x \neq 0, \\ 2f(a) \quad \text{für } x = 0 \,. \end{cases}$$

Der Beweis der Stetigkeit und Linearität von $T^{(m)}$ und von $fT^{(m)} \in C(X)$ läuft wie der entsprechende Beweis für T.

Bemerkung. Da die Schwierigkeit nur daher rührt, daß fT^- unstetig ist, können wir sie dadurch umgehen, daß T als Operator von $C(X)$ in $M(X) \supseteq C(X)$ betrachtet wird. Ähnlich gehen wir in beliebigen (M)-Räumen vor:

Definition 4.1. Zwei (Ko, B)-Räume bzw. (B, V)-Räume X und X' heißen *isomorph*, wenn eine eineindeutige *strukturtreue* Abbildung φ von X auf X', ein sog. *Isomorphismus* φ existiert. Strukturtreue besagt:

$$|f+g|\varphi = f\varphi + g\varphi, \quad |\lambda f|\varphi = \lambda |f\varphi|, \quad |f| = |f\varphi|, \quad f\varphi = |f|\varphi \,,$$

$f \asymp g$ impliziert $f\varphi \asymp g\varphi$ und umgekehrt, für (Ko, B)-Räume ferner $\mathrm{Re}(f)\varphi = \mathrm{Re}(f\varphi)$.

Sind φ_x und φ_y Isomorphismen von X mit X', bzw. von Y mit Y' und ist T ein stetiger linearer Operator von X nach Y, so ist $T' = \varphi_x^{-1} T \varphi_y$ ein stetiger linearer Operator von X' nach Y'. Ist T_0 eine Majorante von

T, so ist $T_0' = \varphi_x^{-1} T_0 \varphi_y$ eine Majorante von T'. Es gilt mit den eingeführten Bezeichnungen:

LEMMA 4.2. *Ist Y ein (Ko,B,bv)-Raum, so ist $Y' = Y\varphi_y$ ein (Ko,B,bv)-Raum und*

$$|\varphi_x^{-1} T \varphi_y| = \varphi_x^{-1} |T| \varphi_y$$

für jeden majorisierbaren Operator T.

BEWEIS. Da φ_y eine eineindeutige Abbildung von Y *auf* Y' ist, sind auch beliebige Supremumsbildungen mit dem Operator φ_y vertauschbar. Die Zerlegungen $Z(f)$ eines $f \in X^+$ entsprechen eineindeutig Zerlegungen $Z(f\varphi_x) = (Z(f))\varphi_x$. Es ist

$$Q^{(\sim)}(Z(f\varphi_x), \varphi_x^{-1} T \varphi_y) = \sum_{i=1}^{k} |f_i \varphi_x \varphi_x^{-1} T \varphi_y| = \sum_{i=1}^{k} |f_i T| \varphi_y .$$

Hieraus folgt $f\varphi_x |\varphi_x^{-1} T \varphi_y| = f|T|\varphi_y$ und also die Behauptung.

Kakutani [13, S. 998] hat gezeigt, daß zu jedem (M)-Raum Y ein kompakter Hausdorffraum Ω existiert, für den Y in $C(\Omega)$, insbesondere also in $M(\Omega)$ isomorph eingebettet werden kann. Vollzieht man die in der Algebra übliche Identifizierung von $h \in Y$ mit $h\varphi_y \in M(\Omega)$, so können wir sagen:

SATZ 4.3. *Ist X ein (B,V)-Raum und Y ein (M)-Raum, so kann Y derart in einen $(B,V,bv,1)$-Raum $Y' \supseteq Y$ eingebettet werden, daß jeder stetige lineare Operator T von X nach Y einen Absolutbetrag $|T|$ besitzt, der ein stetiger linearer Operator von X nach Y' ist.*

Der folgende Majorisierbarkeitssatz für zusammengesetzte Operatoren ist vor allem im Fall $X = Y = Z$ wichtig:

SATZ 4.4. *Sind X, Y und Z (Ko,B)-Räume und ist T_1 ein majorisierbarer Operator von X nach Y und T_2 ein majorisierbarer Operator von Y nach Z, so ist die Hintereinanderausführung $T_1 T_2$ majorisierbar. Sind Y und Z sogar (Ko,B,bv)-Räume, so ist*

$$|T_1 T_2| \leqq |T_1| |T_2| .$$

BEWEIS. T_{01} und T_{02} seien Majoranten von T_1 und T_2. Für $f \in X^+$ ist dann $fT_{01} \geqq |fT_1|$ und nach Lemma 3.1 ist $fT_{01}T_{02} \geqq |fT_1 T_2|$, das heißt $T_{01}T_{02}$ ist eine Majorante von $T_1 T_2$. Ist $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$, so ist

$$Q^{(\sim)}(Z(f), T_1T_2) = \sum_{i=1}^{k} |f_iT_1T_2|$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{k} |f_iT_1||T_2|$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{k} f_i|T_1||T_2| = f|T_1||T_2|$$

und also $|T_1T_2| \leqq |T_1||T_2|$.

5. Operatoren in $L_2(\Omega, B, m)$.

Die linearen stetigen Operatoren in $L_2(\Omega, B, m)$ bilden zwar nach Satz 2.1 einen bedingt vollständigen Verband, sie bilden aber im allgemeinen keinen Verband. Wir wollen dies an einem Beispiel einsehen und dann daraus ein einfaches Kriterium für die Verbandseigenschaft in L_2 herleiten.

Beispiel 6. Sind (Ω_n, B_n, m_n), $n = 1, 2, \ldots$, Maßräume, so kann man sie als Bestandteile einer disjunkten Zerlegung *eines* Maßraumes (Ω', B', m') auffassen. Für $f \in L_2(\Omega', B', m')$ sei $f\varphi_n$ die Einschränkung von f auf Ω_n, und für $f_n \in L_2(\Omega_n, B_n, m_n)$ sei

$$f_n\psi_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega_n, \\ 0 & \text{für } \omega \notin \Omega_n. \end{cases}$$

Ist in jedem $L_2(m_n) = L_2(\Omega_n, B_n, m_n)$ ein stetiger linearer Operator T_n gegeben, so ist durch

$$fT'(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} f\varphi_nT_n\psi_n$$

ein linearer Operator T' von $L_2(\Omega', B', m')$ in den Raum der B'-meßbaren Funktionen gegeben. Ist $\sup \|T_n\|_2 = K_0 < \infty$, so ist T' ein stetiger Operator in $L_2(m')$ mit $\|T'\|_2 = K_0$: Ist nämlich $f \in L_2(m')$, so ist

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|f\varphi_n\|_2^2 \quad \text{und} \quad \|fT'\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|f\varphi_nT_n\|_2^2.$$

Aus $\|T_n\|_2 \leqq K_0$ folgt $\|f\varphi_nT_n\|_2^2 \leqq K_0^2\|f\varphi_n\|_2^2$ und also $\|fT'\|_2^2 \leqq K_0^2\|f\|_2^2$, und daraus ergibt sich $\|T'\|_2 \leqq K_0$. Daß umgekehrt für jedes n die Ungleichung $\|T'\|_2 \geqq \|T_n\|_2$ gilt, sieht man durch Betrachtung der Funktionen $f \in L_2(m')$, die außerhalb von Ω_n den Wert 0 haben. Strebt $\|T_n\|_2$ nach ∞, so ist demnach T kein stetiger Operator. Existieren stetige Operatoren T_n^+ und T'^+, so ist

$$fT'^+(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} f\varphi_nT_n^+\psi_n.$$

Es genügt also, Maßräume (Ω_n, B_n, m_n) und lineare Operatoren T_n mit

$\|T_n\|_2 = 1$ so anzugeben, daß T_n^+, T_n^- und $|T_n|$ als stetige Operatoren in $L_2(m_n)$ existieren, jedoch $\||T_n|\|_2 \to \infty$ gilt.

Ω_n bestehe aus 2^n Punkten x_{ni}: $i = 1, 2, \ldots 2^n$, B_n aus allen Teilmengen von Ω_n und m_n erteile jedem Punkt das Maß 1. Induktiv erklären wir eine Hilfsmatrix A_n:

$$A_1 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_{j+1} = \begin{pmatrix} A_j & A_j \\ A_j & -A_j \end{pmatrix}.$$

In $A_j = (a_{ik})$ sind die a_{ik} unabhängig von j, da beim Schritt von j nach $j+1$ die schon definierte Matrix nur vergrößert wird. Die a_{ik} nehmen nur die Werte ± 1 an. Ferner ist für $1 \leqq k', k'' \leqq 2^j$

$$\sum_{i=1}^{2^j} a_{ik'} a_{ik''} = 2^j \delta_{k'k''}, \tag{5.1}$$

wobei $\delta_{k'k''}$ das Kronecker-Symbol ist. Für $j = 1$ oder $k' = k''$ ist das trivial. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k' < k''$, die Gleichheit (5.1) für $j = j_0$ bewiesen und $j = j_0 + 1$: Ist $k' = k'' - 2^{j_0}$, so sind die ersten Hälften der k'-ten und k''-ten Zeile identisch und die zweiten Hälften gehen durch Multiplikation mit -1 auseinander hervor. Daher ist

$$\sum_{i=1}^{2^j} a_{ik'} a_{ik''} = \sum_{i=1}^{2^{j_0}} a_{ik'} a_{ik'} - \sum_{i=2^{j_0}+1}^{2^j} a_{ik'} a_{ik'} = 0.$$

Sei nun $k' \neq k'' - 2^{j_0}$. Sind $k', k'' \leqq 2^{j_0}$ oder $k', k'' > 2^{j_0}$, so ergibt sich (5.1) direkt aus der Induktionsannahme. Ist aber $k' \leqq 2^{j_0}$ und $k'' > 2^{j_0}$, so ist $l'' = k'' - 2^{j_0} \leqq 2^{j_0}$ und $l'' \neq k'$, ferner ist $a_{ik''} = a_{il''}$ für $i = 1, \ldots, 2^{j_0}$ und $a_{ik''} = -a_{il''}$ für $i = 2^{j_0+1}, \ldots, 2^j$ und nun

$$\sum_{i=1}^{2^j} a_{ik'} a_{ik''} = \sum_{i=1}^{2^{j_0}} a_{ik'} a_{il''} - \sum_{i=2^{j_0}+1}^{2^j} a_{ik'} a_{il''} = 0 - 0.$$

T_n wird nun auf $L_2(m_n)$ durch $A_n = (a_{ik})$ und

$$\chi_{\{x_{nk}\}} T_n = 2^{-\frac{1}{2}n} \sum_{i=1}^{2^n} a_{ik} \chi_{\{x_{ni}\}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n,$$

festgesetzt. Ist $f(x_{nk}) = b_k$, so schreiben wir $f \in L_2(m_n)$ in der Form $(b_1, \ldots, b_{2^n})$. Es ist

$$\begin{aligned} \|(b_1, \ldots, b_{2^n}) T_n\|_2^2 &= 2^{-n} \left\| \left(\sum_{k=1}^{2^n} a_{1k} b_k, \ldots, \sum_{k=1}^{2^n} a_{2^n k} b_k \right) \right\|_2^2 \\ &= 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{2^n} a_{ik} b_k \right)^2 \\ &= 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{2^n} b_k^2 a_{ik}^2 + 2 \sum_{k' \neq k''} a_{ik'} a_{ik''} b_{k'} b_{k''} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} b_k^2 = \|(b_1, \ldots, b_{2^n})\|_2^2, \end{aligned}$$

und also

$$\|T_n\|_2 = 1 .$$

$|T_n|$ existiert und hat die Gestalt

$$\chi_{\{x_{nk}\}}|T_n| = 2^{-\frac{1}{2}n}\sum_{i=1}^{2^n}\chi_{\{x_{ni}\}} .$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|(b_1,\ldots,b_{2^n})|T_n|\,\|_1 &= 2^n\cdot 2^{-\frac{1}{2}n}\left|\sum_{i=1}^{2^n} b_i\right| \\ &\leqq 2^{\frac{1}{2}n}\|(b_1,\ldots,b_{2^n})\|_1\end{aligned}$$

mit Gleichheit, wenn die b_i positiv sind. Ebenso gilt

$$\begin{aligned}\|(b_1,\ldots,b_{2^n})|T|\,\|_\infty &= 2^{-\frac{1}{2}n}\left|\sum_{i=1}^{2^n} b_i\right| \\ &\leqq 2^{\frac{1}{2}n}\|(b_1,\ldots,b_{2^n})\|_\infty\end{aligned}$$

mit Gleichheit, wenn die b_i gleich groß und positiv sind. Also ist

$$\|\,|T_n|\,\|_1 = \|\,|T_n|\,\|_\infty = 2^{\frac{1}{2}n} .$$

Nach dem Rieszschen Konvexitätssatz (Dunford–Schwartz [7, S. 525]) folgt $\|\,|T_n|\,\|_2 \leqq 2^{\frac{1}{2}n}$. Es ist

$$\|\,|T_n|(1,\ldots,1)\|_2^2 = 2^{2n} = 2^n\|(1,\ldots,1)\|_2^2$$

und somit $\|\,|T_n|\,\|_2 = 2^{\frac{1}{2}n}$.

Bemerkung. Nimmt f auf Ω_n den Wert 2^{-n} an, $n=1,2,\ldots$, so ist $f\in L_2(m')$ und also $fT\in L_2(m')$. Es ist aber in diesem Fall nicht $f|T|\in L_2(m')$ und dies zeigt, daß die linearen Operatoren in $L_2(m')$ auch beim Absehen von der Stetigkeitsforderung keinen Verband bilden.

Lemma 5.1. *Sei (Ω,B,m) ein Maßraum, $B_x\subseteqq B$ ein σ-Körper, $\Omega=\Omega_x+\Omega_y$ eine disjunkte B_x-meßbare Zerlegung von Ω und für $X\in B_x$ sei $m_x(X)=m(X\cap\Omega_x)$. Der Raum (Ω,B_x,m_x) sei σ-endlich. Bilden dann die stetigen linearen Operatoren im reellen $L_2(\Omega,B,m)$ einen Verband, so auch die stetigen linearen Operatoren im reellen $L_2(\Omega,B_x,m_x)$.*

Beweis. Es sei T_x ein stetiger linearer Operator in $L_2(\Omega,B_x,m_x)$ und E_x die bedingte Erwartung bezüglich B_x und m_x. Der Operator T sei in $L_2(\Omega,B,m)$ erklärt durch

$$fT = \big((fE_x)\chi_{\Omega_x})T_x\big)\chi_{\Omega_x} .$$

Nach Voraussetzung existiert $T^+=T\vee 0$. Wir setzen für $g\in L_2(\Omega,B_x,m_x)$

$$gT_x^{(+)} = \big((g\chi_{\Omega_x})T^+E_x\big)\chi_{\Omega_x} .$$

Ist $g \geqq 0$, so ist $gT_x^{(+)} \geqq 0$ und

$$\begin{aligned} g(T_x^{(+)} - T_x) &= \big((g\chi_{\Omega_x})T^+E_x\big)\chi_{\Omega_x} - \big((g\chi_{\Omega_x})T_x\big)\chi_{\Omega_x} \\ &\geqq \big((g\chi_{\Omega_x})TE_x\big)\chi_{\Omega_x} - \big((g\chi_{\Omega_x})T_x\big)\chi_{\Omega_x} = 0 \end{aligned}$$

m_x-fastüberall. Da die stetigen linearen Operatoren in $L_2(\Omega, B_x, m_x)$ nach Satz 2.1 einen bedingt vollständigen Verband bilden, existiert $T_x \vee 0$.

Satz 5.1. *Die linearen stetigen Operatoren im reellen $L_2(\Omega, B, m)$ bilden genau dann einen Verband, wenn $L_2(\Omega, B, m)$ endlich-dimensional ist.*

Beweis. 1. Die Bedingung ist hinreichend: Wir sagen (Ω, B, m) habe die Eigenschaft (N), wenn es eine solche ganze Zahl $n \geqq 0$ gibt, daß in Ω maximal n disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n$ positiven endlichen Maßes existieren. Jedes $f \in L_2(\Omega, B, m)$ hat dann die Gestalt $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, das heißt die gleiche Gestalt wie die Funktionen $f \in L_1$. Hat (Ω, B, m) nicht die Eigenschaft (N), so gibt es in Ω abzählbar viele disjunkte Mengen C_k, $k = 1, 2, \ldots$, positiven endlichen Maßes m_k: Ist nämlich $\{D_1, D_2, D_3\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω und hat D_1 und D_2 positives endliches Maß, so hat (Ω, B, m) unmöglich bei Einschränkung auf jedes D_k die Eigenschaft (N), also etwa auf D_2 oder D_3 nicht. Wir setzen $D_1 = C_1$ und spalten vom Rest $D_2 \cup D_3$ ebenso weitere C_k ab. Insbesondere hat $L_2(\Omega, B, m)$ dann mindestens abzählbare Dimension.

Ist L_2 endlich-dimensional, so haben L_2 und $L_1 = L_2$ äquivalente Normen. (Siehe z. B. M. A. Neumark [15, S. 66]). Die stetigen linearen Operatoren in L_2 sind dann die gleichen wie die in L_1 und bilden nach Corollar 4.1 einen Verband.

2. Die Bedingung ist notwendig: Nun sei $L_2(\Omega, B, m)$ unendlich-dimensional, $\Omega_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, $\Omega_y = \Omega - \Omega_x$, B_x von den C_k erzeugt und m_x wie in Lemma 5.1 erklärt. Es genügt zu zeigen, daß die linearen stetigen Operatoren auf $L_2(\Omega, B_x, m_x)$ keinen Verband bilden, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Omega_y = 0$ annehmen können. Die $x_{ni} \in \Omega'$ numerieren wir durch als $C_k' \subseteqq \Omega'$. Der Raum $L_2(\Omega_x, B_x, m_x)$ ist isomorph zu $L_2(\Omega', B', m')$ durch den Isomorphismus φ:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{C_k}\Big)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k m_k^{\frac{1}{2}} \chi_{C'k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \chi_{C'k}\,.$$

Daß φ ein Isomorphismus ist, folgt aus

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{C_k} \Big\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^2|\, m_k = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k'|^2 = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \chi_{C'k} \Big\|_2^2 .$$

Damit ist der allgemeine Fall auf das eingangs gegebene Beispiel reduziert.

6. Der duale Operator.

SATZ 6.1. *Ist T ein majorisierbarer Operator von dem (Ko,B)-Raum X in den (Ko,B)-Raum Y mit der Majorante T_0, so ist der duale Operator T_0^* von T_0 eine Majorante von T^*. Ist insbesondere Y ein (Ko,B,bv)-Raum und sind X^* und Y^* (Ko,B)-Räume, so gilt $|T^*| \leqq |T|^*$.*

BEWEIS. Der Raum X^* besteht aus den stetigen linearen Operatoren von X in den $(Ko,B,1,bv)$-Raum K der komplexen Zahlen und nach Satz 4.2 können wir zu $h \in X^*$ $|h|$ bilden. (f,h) bezeichne den Wert von h für $f \in X$. Aus Satz 3.2 folgt $|(f,h)| \leqq (|f|,|h|)$. Sei nun $f \in X^+$, $h \in X^*$, $|h| \leqq g \in X^{*+}$. Es ist

$$\begin{aligned} |(f,hT^*)| = |(fT,h)| &\leqq (|fT|,|h|) \\ &\leqq (fT_0,|h|) \\ &= (f,|h|T_0^*) \leqq (f,gT_0^*) . \end{aligned}$$

gT_0^* ist also eine Majorante von hT^*, das heißt $|hT^*| \leqq gT_0^*$. Da dies insbesondere für $h=g$ gilt, ist T_0^* Majorante von T^*. Ist Y (Ko,B,bv)-Raum, so kann man $|T|$ bilden; $|T|$ ist Majorante von T, also $|T|^*$ von T^*. Ist X^* (Ko,B)-Raum, so ist aufgrund von Satz 2.1 sogar X^* ein (Ko,B,bv)-Raum. Da $|T|^*$ Majorante von T^* ist, ist $|T^*| \leqq |T|^*$.

Wir wollen wenigstens in einigen Fällen $|T^*| = |T|^*$ beweisen:

LEMMA 6.1. *Ist X ein bedingt vollständiger Banachverband und bedeutet $\varkappa$ die natürliche Einbettung von X in X^{**}, so gilt für $a_1, a_2 \in X$ stets $a_1\varkappa \vee a_2\varkappa = (a_1 \vee a_2)\varkappa$.*

BEWEIS. Für $b \in X^+$ erklären wir ähnlich wie Kakutani [12, S. 526], einen Operator P_b in X. Für $x \in X^+$ sei

$$xP_b = \sup_n (nb \wedge x) .$$

Aus

$$\begin{aligned} (nb \wedge x) + (nb \wedge y) &= \big(nb + (nb \wedge y)\big) \wedge \big(x + (nb \wedge y)\big) \\ &= 2nb \wedge (nb+y) \wedge (x+nb) \wedge (x+y) \end{aligned}$$

folgt

$$nb \wedge (x+y) \leqq (nb \wedge x) + (nb \wedge y) \leqq 2nb \wedge (x+y) .$$

Aus der Monotonie der Folgen $nb \wedge x$ und $nb \wedge y$ erhalten wir damit $xP_b + yP_b = (x+y)P_b$ für $x, y \in X^+$. Der Operator P_b ist positiv homogen auf X^+, da für $\lambda \geqq 0$ stets

$$\begin{aligned} nb \wedge \lambda x &\leqq \lambda\big(([\lambda^{-1}n]+1)b \wedge x\big) \\ &\leqq (n+[\lambda]+1)b \wedge \lambda x \end{aligned}$$

ist. Ferner ist $0 \leqq xP_b \leqq x$ und daher $\|P_b\| \leqq 1$. Also kann P_b zu einem stetigen linearen Operator in X fortgesetzt werden.

Ist $x \wedge b = 0$, so ist $nx \wedge nb = 0$ und erst recht $x \wedge nb = 0$. Dann ist also $xP_b = 0$.

Sei nun $a \in X$. Die Form $a\varkappa$ ist Linearform auf X^* und für $L \in X^{*+}$ ist nach (3.2)

$$(L, (a\varkappa)^+) = \sup_{0 \leqq L' \leqq L} (L', a\varkappa) .$$

Für $0 \leqq L' \leqq L$ ist

$$\begin{aligned}(L', a\varkappa) = (a, L') &= (a^+ - a^-, L') \\ &\leqq (a^+, L') \leqq (a^+, L) .\end{aligned}$$

Umgekehrt ist durch $(x, L') = (xP_{a^+}, L)$ eine stetige Linearform L' auf X definiert und für $x = a$ ist

$$(L', a\varkappa) = (aP_{a^+}, L) = (a^+P_{a^+}, L) - (a^-P_{a^+}, L) = (a^+, L) .$$

Daraus folgt $(L, (a\varkappa)^+) = (a^+, L) = (L, (a^+)\varkappa)$, das heißt $(a \vee 0)\varkappa = a\varkappa \vee 0$. Durch Translation erhalten wir daraus $a_1\varkappa \vee a_2\varkappa = (a_1 \vee a_2)\varkappa$ für beliebige $a_1, a_2 \in X$.

Bemerkung. Nach einer Fußnote von Kakutani [13, S. 1023], hat Alaoglu dieses Lemma sogar für beliebige Banachverbände bewiesen. Alaoglu scheint den Beweis nicht veröffentlicht zu haben.

Satz 6.2. *Ist T ein majorisierbarer Operator von dem (Ko, B, bv)-Raum X in den (Ko, B, mK)-Raum Y, sind ferner X^*, Y^* und Y^{**} (Ko, B)-Räume (vgl. Bemerkung (2) nach diesem Satz), so ist $|T^*| = |T|^*$.*

Beweis. Für $h \in Y$ gilt $|h|\varkappa = |h\varkappa|$. Ist nämlich $h = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ mit $h_i \in Y^+$ und $h_i \wedge h_k = 0$, $i \neq k$, so ist

$$|h|\varkappa = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| h_i \right) \varkappa = \sum_{i=1}^{n} |a_i| h_i \varkappa .$$

Da aber $h_i\varkappa \wedge h_k\varkappa = 0$ für $i \neq k$ ist und Y^{**} ein (Ko, B)-Raum ist, erhalten wir für solche h stets $|h|\varkappa = |h\varkappa|$. Wegen der Stetigkeit des Übergangs zum Absolutbetrag gilt es für alle $h \in Y$. Nun ist für $g \in Y^{*+}$ und $d \in X$

$$\begin{aligned}|(g, dT\varkappa)| = |(dT, g)| &= |(d, gT^*)| \\ &\leqq (|d|, |gT^*|) \\ &\leqq (|d|, g|T^*|) = (g, |d|\varkappa|T^*|^*) .\end{aligned}$$

Da dies für alle $g \in Y^{*+}$ gilt, ist $|d|\varkappa|T^*|^*$ Majorante von $dT\varkappa$, das heißt

$$|dT\varkappa| \leqq |d|\varkappa|T^*|^* \quad \text{bzw.} \quad |dT|\varkappa \leqq |d|\varkappa|T^*|^* .$$

Für $f_i \in X^+$ haben wir

$$|f_i T|\varkappa \leqq f_i \varkappa |T^*|^* \leqq f_i \varkappa |T|^{**} = f_i |T|\varkappa \,. \tag{6.1}$$

Sei nun $f \in X^+$ und $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$. Setzen wir (6.1) in

$$f|T|\varkappa = \left(\lim_{Z(f) \in \mathfrak{Z}(f)} \sum_{i=1}^{k} |f_i T| \right) \varkappa$$

ein, so folgt wegen

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |f_i T| \right) \varkappa = \sum_{i=1}^{k} (|f_i T|\varkappa) \leqq \sum_{i=1}^{k} f_i \varkappa |T^*|^* = f\varkappa |T^*|^* \,,$$

daß

$$f|T|\varkappa \leqq f\varkappa |T^*|^* \leqq f\varkappa |T|^{**} = f|T|\varkappa$$

und also Gleichheit. Für $g \in Y^*$ ist also

$$\begin{aligned} (f, g|T|^*) = (f|T|, g) = (g, f\varkappa |T|^{**}) &= (g, f\varkappa |T^*|^*) \\ &= (g|T^*|, f\varkappa) = (f, g|T^*|) \,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $|T|^* = |T^*|$.

Bemerkungen. (1) Gelingt es, in Lemma 6.1 $(\sup f_i)\varkappa = \sup(f_i \varkappa)$ nicht nur für endliche Suprema zu beweisen, so genügt es, wenn Y in Satz 6.2 ein (Ko, B, bv)-Raum ist.

(2) (beim Druck): Die in den Sätzen 4.1 und 4.2 untersuchten Räume von Operatoren, insbesondere Dualräume von (Ko, B)-Räumen, sind (Ko, B)-Räume. Ich werde das zeigen in *Ein Approximationslemma in der komplexen Hülle von Banachverbänden.*

7. Vollstetige Operatoren.

Ein linearer stetiger Operator T von einem Banachraum X in einen Banachraum Y heißt *vollstetig*, wenn das Bild ET der *Einheitskugel*

$$E = \{f \in X : \|f\| \leqq 1\}$$

bedingt norm-kompakt ist. — Wir benötigen folgende Variante eines Satzes von Mazur:

Lemma 7.1. *Ist Y ein komplexer Banachraum und $A \subseteqq Y$ bedingt kompakt, so ist*

$$H(A) = \left\{ g \in Y : \; g = \sum_{i=1}^{k} a_i g_i ; \; g_i \in A, \; \sum_{i=1}^{k} |a_i| \leqq 1 \right\}$$

ebenfalls bedingt kompakt.

BEWEIS. Die Einheitskugel $E(K)$ des Raumes K der komplexen Zahlen ist kompakt, ebenso die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von A, also auch $\bar{A} \times E(K)$. Da $(f,c) \to cf$ stetig ist, ist $\{cf : c \in E(K), f \in \bar{A}\}$ kompakt. Satz V. 2.6 in Dunford–Schwartz [7] von Mazur besagt, daß die konvexe Hülle dieser Menge bedingt kompakt ist. Sie enthält $H(A)$.

SATZ 7.1. *Der Absolutbetrag $|T|$ eines vollstetigen linearen stetigen Operators T von einem (Ko,B,L)-Raum X in einen (Ko,B,mK)-Raum Y ist vollstetig.*

BEMERKUNG. Im reellen Fall bedeutet dies: Die vollstetigen Operatoren von einem (L)-Raum X in einen (B,V,mK)-Raum Y bilden einen linearen Unterverband des Vektorverbandes aller stetigen linearen Operatoren von X nach Y, da nach Dunford–Schwartz [7, Satz VI 5.4] die vollstetigen Operatoren einen linearen Raum bilden.

BEWEIS. Der Raum $\overline{ET}$ ist kompakt. Da die Abbildung $f \to |f|$ normstetig ist, ist $A = \{|f| : f \in \overline{ET}\}$ bedingt kompakt. (Da $f \to |f|$ nicht stets schwach stetig ist, scheint sich Satz 7.1 nicht auf schwach vollstetige Operatoren übertragen zu lassen.) $H(A)$ und $H(\overline{H(\bar{A})})$ sind bedingt kompakt.

Sei $f \in X^+$ und $\|f\| \leqq 1$. Wir zeigen $f|T| \in \overline{H(\bar{A})}$. Da für eine geeignete Folge von Zerlegungen $Z(f)$

$$f|T| = \lim Q^{(\sim)}(Z(f),T)$$

ist, genügt es nachzuweisen, daß $Q^{(\sim)}(Z(f),T)$ zu $H(A)$ gehört. Sei $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ und $\|f_i\| = a_i > 0$. Wir setzen $g_i = a_i^{-1} f_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^k |a_i| \leqq 1$ und $\|g_i\| \leqq 1$ und daher

$$Q^{(\sim)}(Z(f),T) = \sum_{i=1}^{k} a_i |g_i T| \in H(A) .$$

Es genügt nun, für $h \in \mathrm{Tr}(X)$ mit $\|h\| \leqq 1$

$$h|T| \in H(\overline{H(\bar{A})})$$

nachzuweisen. Es sei $h = \sum_{i=1}^n c_i h_i$ mit $h_i \wedge h_k = 0$, $i \neq k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $|c_i| > 0$ und $\|h_i\| > 0$. Setzen wir $d_i = \|h_i\|^{-1} h_i$, so ist $\|d_i\| = 1$, $h = \sum_{j=1}^n (c_j \|h_j\|) d_j$ und

$$\sum_{j=1}^{n} (|c_j| \, \|h_j\|) = \left\| \sum_{j=1}^{n} |c_j| \, h_j \right\| = \| \, |h| \, \| = \|h\| \leqq 1 .$$

Demzufolge ist $h|T| = \sum_{j=1}^n (c_j \|h_j\|) d_j |T| \in H(\overline{H(\bar{A})})$.

8. Treppenoperatoren und starke Operatortopologie.

Wir diskutieren nun eine Klasse von besonders einfach gebauten Operatoren. (Ω, B, m) sei ein Maßraum, X der komplexe $L_1(\Omega, B, m)$ und Y sei ein (Ko, B)-Raum. Die nun einzuführenden Treppenoperatoren besitzen einen Absolutbetrag $|T|$, der finit bestimmbar ist, während die Bestimmung von $|T|$ im allgemeinen Grenzwertbildungen oder sogar überabzählbare Suprema erfordert. Treppenoperatoren sind stets vollstetig. Wir zeigen, daß sie in dem Sinne repräsentativ sind, daß sie stark operatordicht im Raum aller stetigen linearen Operatoren $X \to Y$ liegen.

Wir nennen einen Operator T von X nach Y *Treppenoperator*, wenn er die Gestalt hat

$$fT = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} f \, dm \, h_i \,, \tag{8.1}$$

wobei die Ω_i disjunkte B-meßbare Mengen sind und $h_i \in \mathrm{Tr}(Y)$ gilt. T ist linear und stetig mit

$$\|T\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \|h_i\| = M < \infty; \tag{8.2}$$

denn es ist

$$\|fT\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|f\chi_{\Omega_i} T\| \leqq M \cdot \sum_{i=1}^{n} \|f\chi_{\Omega_i}\| \leqq M\|f\| \,,$$

und Gleichheit gilt für $f = \chi_{\Omega_i}$, wenn i der Index ist, für den das Maximum angenommen wird. Für Treppenoperatoren T liefert die Zerlegung

$$Z(f) = \{f\chi_{\Omega_1}, \ldots, f\chi_{\Omega_n}\}$$

bereits $\sup Q^{(\sim)}(Z(f), T)$. Der Raum Y braucht daher nicht ein (Ko, B, bv)-Raum zu sein. Wir erhalten

$$f|T| = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} f \, dm \, |h_i| \,. \tag{8.3}$$

Treppenoperatoren lassen sich auch definieren, wenn X ein (L)-Raum ist. Wir begnügen uns mit dem Hinweis, daß nach Kakutani [12, S. 532] jeder (L)-Raum zu einem Raum $L_1(\Omega, B, m)$ isomorph ist.

Satz 8.1. *Die Treppenoperatoren liegen in der starken Operatortopologie dicht im Banachraum aller stetigen linearen Operatoren vom komplexen* $L_1(\Omega, B, m) = X$ *in den* (Ko, B)*-Raum* Y.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_m \in X$ und T ein stetiger linearer Operator von X nach Y. Wir müssen einen Treppenoperator T_ε konstruieren, für den $\|f_k T - f_k T_\varepsilon\| < \varepsilon$ für $k = 1, \ldots, m$ gilt. Wir können $\|T\| > 0$ annehmen, denn $T = 0$ ist Treppenoperator.

Zu jedem f_k bestimmen wir eine Treppenfunktion f_k' mit

$$\|f_k - f_k'\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon/\|T\|, \qquad k = 1,\ldots,m\,. \tag{8.4}$$

Für die endlich vielen f_k' gibt es eine Darstellung $f_k' = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\chi_{\Omega_i}$ mit disjunkten und gemeinsamen Ω_i und $0 < m(\Omega_i) < \infty$. Wir suchen zu $\chi_{\Omega_i}T = y_i$ ein $g(y_i) \in \mathrm{Tr}(Y)$ mit den Eigenschaften

$$\|g(y_i)\| \leqq \|y_i\|, \qquad \|y_i - g(y_i)\| < \delta(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}\varepsilon \left(\max_k \sum_{i=1}^{n} |c_{ki}|\right)^{-1}.$$

Um $g(y_i)$ zu finden, suchen wir zunächst eine Folge $g_j(y_i) \in \mathrm{Tr}(Y)$ mit $\|y_i - g_j(y_i)\| \to 0$. Im Beweis von Lemma 3.1 ist gezeigt, daß solch eine Folge sogar unter der Zusatzbedingung $|g_j(y_i)| \leqq |y_i|$ existiert. Für ein j mit $\|y_i - g_j(y_i)\| < \delta(\varepsilon)$ setzen wir $g(y_i) = g_j(y_i)$ und erhalten zugleich

$$\|g(y_i)\| = \| |g_j(y_i)| \| \leqq \| |y_i| \| = \|y_i\|\,.$$

Sei $h_i = m(\Omega_i)^{-1} g(y_i)$ und T_ε der Treppenoperator

$$fT_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i} f\, dm\, h_i\,.$$

T_ε bildet χ_{Ω_i} auf $g(y_i)$ ab. Für $1 \leqq k \leqq m$ ist

$$\|f_k'T - f_k'T_\varepsilon\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |c_{ki}|\,\|y_i - g(y_i)\| < \tfrac{1}{4}\varepsilon\,.$$

Aus $\|\chi_{\Omega_i}T\| \geqq \|g(y_i)\| = \|h_i\|\, m(\Omega_i)$ folgt durch Vergleich mit (8.2) die Ungleichung $\|T_\varepsilon\| \leqq \|T\|$. Nun ist

$$\begin{aligned} \|f_kT_\varepsilon - f_kT\| &\leqq \|f_kT_\varepsilon - f_k'T_\varepsilon\| + \|f_k'T_\varepsilon - f_k'T\| + \|f_k'T - f_kT\| \\ &\leqq \|f_k - f_k'\|\,\|T_\varepsilon\| + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \|f_k - f_k'\|\,\|T\| \\ &\leqq \tfrac{1}{4}\varepsilon + 2\|T\|\,\|f_k - f_k'\| < \varepsilon, \qquad k = 1,\ldots,m\,. \end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Dichtigkeitsaussage gilt erst recht, wenn man in (8.1) $h_i \in Y$ zuläßt. Sie gilt aber in einigen Fällen sogar noch, wenn man den Zulässigkeitsbereich für Ω_i und h_i einschränkt, um z. B. bei separablem L_1 und Y zu zeigen, daß der Banachraum der stetigen Operatoren separabel in der starken Operatortopologie ist.

Die Abbildung $T \to |T|$ ist im allgemeinen weder in der starken noch in der schwachen Operatortopologie stetig (Chacon und Krengel [5, Abschnitt 7]). Wir müssen uns daher mit einer Art monotoner Stetigkeit begnügen:

LEMMA 8.1. *Sind T und T_n, $n=1,2,\ldots$, majorisierbare stetige lineare Operatoren von einem (Ko,B)-Raum X in einen (Ko,B,mK)-Raum Y und strebt T_n in der starken Operatortopologie gegen T, so gilt für $f\in X^+$:*

$$\lim_{n\to\infty}\|(f|T_n|-f|T|)^-\| = 0 .$$

Ist X ein (B,V)-Raum und Y ein (B,V,mK)-Raum, so gilt ferner

$$\lim_{n\to\infty}\|(fT_n{}^+-fT^+)^-\| = 0 . \tag{8.5}$$

BEWEIS. Zu $\varepsilon>0$ und $f\in X^+$ wählen wir ein $Z_\varepsilon(f)=\{f_1,\ldots,f_k\}$ mit $\|f|T|-Q^{(\sim)}(Z_\varepsilon(f),T)\|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Eine Zahl $N(\varepsilon)$ wird so bestimmt, daß für $n\geqq N(\varepsilon)$ und $i=1,\ldots,k$

$$\|f_iT-f_iT_n\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon/k$$

ist. Aus $|a-b|\geqq\big||a|-|b|\big|$ folgt dann

$$\|Q^{(\sim)}(Z_\varepsilon(f),T_n)-Q^{(\sim)}(Z_\varepsilon(f),T)\| \leqq \sum_{i=1}^{k}\||f_iT_n|-|f_iT|\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Nun ist $\|Q^{(\sim)}(Z_\varepsilon(f),T_n)-f|T|\|<\varepsilon$. Da bei weiterer Verfeinerung von $Z(f)$ die Folge $Q^{(\sim)}(Z(f),T_n)$ monoton wächst, ist

$$\|(f|T_n|-f|T|)^-\| < \varepsilon \quad \text{für } n\geqq N(\varepsilon) .$$

Ganz analog wird die zweite Teilaussage bewiesen.

COROLLAR 8.1. *Sind T und T_n, $n=1,2,\ldots$, majorisierbare stetige lineare Operatoren von einem (B,V)-Raum X in einen (B,V,mK)-Raum Y, gilt $T_n\leqq T_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, und strebt $\{T_n\}$ in der starken Operatortopologie gegen T, so auch $\{T_n{}^+\}$ gegen T^+.*

BEWEIS. Sei $f\in X^+$, dann ist $fT\geqq fT_n$. Es folgt

$$Q^{r+}(Z(f),T_n) \leqq Q^{r+}(Z(f),T) \leqq fT^+ ,$$

also $fT_n{}^+\leqq fT^+$, das heißt $\|(fT_n{}^+-fT^+)^+\|=0$. Zusammen mit (8.5) ergibt das

$$\|fT_n{}^+-fT^+\|\to 0$$

und das ist hinreichend für die Konvergenz der $T_n{}^+$ gegen T^+ in der starken Operatortopologie.

9. Ein individueller Ergodensatz.

R. V. Chacon [4] hat den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 9.1. *Sei (Ω,B,m) ein σ-endlicher Maßraum, T ein linearer Operator in $L_1(\Omega,B,m)$ mit $\|T\|_1\leqq 1$ und p_k, $k=0,1,\ldots$, eine Folge nichtnegativer*

meßbarer Funktionen mit der Eigenschaft (A): *Für alle* $g \in L_1$ *mit* $|g| \leqq p_k$ *gilt*

$$|gT| \leqq p_{k+1} .$$

Dann existiert für jedes $f \in L_1$ *fastüberall auf* $\{\omega: 0 < \sum_{k=0}^{\infty} p_k \leqq \infty\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} fT^k}{\sum_{k=0}^{n} p_k} < \infty .$$

Mit Hilfe des Absolutbetrages $|T|$ ist es möglich, die Existenz von Folgen p_k mit der Eigenschaft (A) für beliebige stetige lineare Operatoren T in L_1 zu garantieren (siehe Chacon und Krengel [5]):

Satz 9.2. *Ist* (Ω, B, m) *ein* σ*-endlicher Maßraum,* T *ein linearer Operator in* $L_1(\Omega, B, m)$ *mit* $\|T\|_1 \leqq 1$, $f, p \in L_1$ *und* $p \geqq 0$, *so existiert fastüberall auf* $\{\omega : 0 < \sum_{k=0}^{\infty} p|T|^k \leqq \infty\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} fT^k}{\sum_{k=0}^{n} p|T|^k} < \infty .$$

Beweis. Es sei $p_k = p|T|^k$. Ist $|g| \leqq p|T|^k$, so ist

$$|gT| \leqq |g||T| \leqq p|T|^{k+1} .$$

Für $T \geqq 0$ ist $|T| = T$, und dann macht Satz 9.2 gerade die Aussage des Satzes von Chacon–Ornstein [6] aus. Der Beweis von Satz 9.2 gelingt auch ohne den Umweg über Satz 9.1 durch Umformulierung der von Chacon [4] entwickelten Methoden, wobei sich einige Beweisteile erübrigen.

10. Ergodische Zerlegungen.

Die nun beschriebenen Definitionen und Sätze sind, soweit sie nicht den Begriff des Absolutbetrags eines Operators erfordern, bereits von Jacobs [10], zum Teil schon von R. V. Chacon [3] dargestellt worden: Es sei (Ω, B, m) ein σ-endlicher Maßraum und L_1 der reelle oder komplexe $L_1(\Omega, B, m) = L_1(m)$. Wir ordnen jedem Operator T in $L_1(m)$ den zugehörigen normierten Operator $T/\|T\| = \mathfrak{T}$ zu, den trivialen Fall $T = 0$ schließen wir aus. Chacon [3, Theorem 2] hat gezeigt: Ist $T \geqq 0$ und $\|T\| = 1$, so gibt es eine disjunkte Zerlegung von Ω in einen *konservativen Teil* $C(T)$ und einen dissipativen Teil. Ist $p \in L_1^+$ und fastüberall > 0, so ist $C(T)$ gerade $\{\omega: \sum_{k=0}^{\infty} pT^k = +\infty\}$ unabhängig von p. Für beliebiges $T \neq 0$ sei $C(T) = C(|\mathfrak{T}|)$.

Eine Menge $I \in B$ heiße *schwach* T*-invariant*, wenn für jede außerhalb von I fastüberall verschwindende Funktion $f \in L_1$ auch fT diese Eigen-

schaft hat. Ist außerdem $I \subseteq C(T)$, so heißt I *T-invariant*. Die Begriffe der schwach T-invarianten Menge und der T-invarianten Menge sind invariant gegen den Übergang zu λT, $\lambda \neq 0$, speziell zu $\mathfrak{T}$. Chacon [3, Lemma 5] hat gezeigt, daß für positives T mit $\|T\| = 1$ die T-invarianten Mengen einen σ-Körper B_1 mit der Grundmenge $C(T)$ bilden.

Lemma 10.1. *Eine Menge ist genau dann (schwach) T-invariant, wenn sie (schwach) $|T|$-invariant ist. Insbesondere bilden die T-invarianten Mengen einen σ-Körper B_1 mit der Grundmenge $C(T)$.*

Beweis. Ist I schwach T-invariant, $f \in L_1^+$ und $\{\omega : f(\omega) \neq 0\} \subseteq I$, so gilt für alle $g \in L_1$ mit $|g| \leq f$ die Inclusion $\{\omega : g(\omega) \neq 0\} \subseteq I$ und also auch $\{\omega : gT(\omega) \neq 0\} \subseteq I$ und nach Satz 3.2 $\{\omega : f|T|(\omega) \neq 0\} \subseteq I$. Für beliebige $f \in L_1$ mit $\{\omega : f(\omega) \neq 0\} \subseteq I$ folgt die letzte Inclusion, indem man sie zuerst für Treppenfunktionen beweist und f dann approximiert. I ist also auch schwach $|T|$-invariant. Ist umgekehrt eine schwach $|T|$-invariante Menge I gegeben und $f \in L_1$ eine Funktion mit $\{\omega : f(\omega) \neq 0\} \subseteq I$, so ist auch $\{\omega : |f|(\omega) \neq 0\} \subseteq I$. Daher ist

$$\begin{aligned} \{\omega : fT(\omega) \neq 0\} &\subseteq \{\omega : |fT|(\omega) \neq 0\} \\ &\subseteq \{\omega : |f||T|(\omega) \neq 0\} \subseteq I . \end{aligned}$$

Da $C(T) = C(|T|)$ ist, sind auch die T-invarianten Mengen gerade die $|T|$-invarianten Mengen.

(T, m) heißt *ergodisch*, wenn eine disjunkte Zerlegung $C(T) = E \cup F$ von $C(T)$ in invariante Mengen E, F positiven Maßes unmöglich ist.

Ziel ist es, stetige lineare Operatoren $T \neq 0$ in L_1 in einem zu definierenden Sinn in ergodische T_ω zu zerlegen.

Sei $K(B)$ der in Abschnitt 1, Beispiel 2 beschriebene (Ko, B)-Raum der komplexen Ladungsverteilungen auf (Ω, B). Ist $B_0 \subseteq B$ ein weiterer σ-Körper, so sei m_0 die Einschränkung von m auf B_0. Wir betrachten Scharen $\hat{p} = \{p_\omega, \omega \in \Omega\}$ mit Werten $p_\omega \in K(B)$. Eine Schar $\hat{p}$ heißt *B_0-meßbar*, wenn für jedes $F \in B$ $p_\omega(F)$ eine B_0-meßbare Funktion ist, und $\hat{p}$ heißt *m_0-integrabel*, wenn

$$\|\hat{p}\| = \int_\Omega \|p_\omega\| \, m_0(d\omega) < \infty$$

ist. Zwei Scharen $\hat{p}$ und $\hat{q}$ heißen *m_0-äquivalent*, wenn m_0-fastüberall $p_\omega = q_\omega$ ist, d. h. wenn $\|\hat{p} - \hat{q}\| = 0$ ist. Wir identifizieren die Elemente der dadurch festgelegten Äquivalenzklassen miteinander. Die Schar $\hat{p}$ heiße *totalstetig* bzgl. $\hat{q}$, in Zeichen $\hat{p} \ll \hat{q}$, wenn $p_\omega \ll q_\omega$ für m_0-fastalle ω gilt. Es sei

$$L_1(\hat{m}) = \{\hat{p}\colon \|\hat{p}\| < \infty \text{ und } \hat{p} \gg \hat{m}\}\,,$$

ferner

$$L_1'(m) = \{p \in K(B)\colon\ p \ll m\}\,.$$

Den durch den Satz von Radon–Nikodym gegebenen Isomorphismus von $L_1(m) \to L_1'(m)$ bezeichnen wir mit ψ.

Ist $q \in K(B)$, so heiße eine B_0-meßbare Schar $\hat{q} = \{q_\omega\colon \omega \in \Omega\}$ eine Zerlegung von q nach B_0, wenn

$$q(F \cap G) = \int_G q_\omega(F)\, m_0(d\omega) \quad \text{für} \quad F \in B,\ G \in B_0 \tag{10.1}$$

gilt. Ist $m(\Omega) = 1$, so ist $\hat{m}$ gerade eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von m bzgl. B_0. Existiert zu jedem $B_0 \subseteqq B$ eine Zerlegung $\hat{m}$, so sagen wir, (Ω, B, m) habe die *Eigenschaft* $(\hat{B})$. (Siehe z. B. Jacobs [9, Kap. 9, § 6].)

Im folgenden sei B abzählbar erzeugt. Von Jacobs [10] übernehmen wir folgende Tatsachen in leichter Verallgemeinerung aufs Komplexe: Existiert eine Zerlegung $\hat{m}$ von m nach B_0, so besitzt jedes $p \in L_1'(m)$ eine Zerlegung $\hat{p}$ nach B_0. Ist $dp = f dm$, so ist

$$dp_\omega = f dm_\omega \tag{10.2}$$

für m_0-fastalle ω. Bezeichnet $K(\hat{m})$ die Menge aller $\hat{p} \in L_1(\hat{m})$, die gemäß (10.2) durch Funktionen $f \in L_1(m)$ gegeben sind, so ist die Abbildung $\varphi : p \to \hat{p}$ ein Isomorphismus von $L_1'(m)$ und $K(\hat{m})$.

Der Beweis beruht auf folgender Tatsache: Für $f \in L_1(m)$ und $G \in B_0$ ist

$$\int_G f\, dm = \int_G \left(\int_\Omega f\, dm_\omega \right) m_0(d\omega)\,. \tag{10.3}$$

Wir merken uns, daß ein in der Gestalt (10.2) gegebenes $\{p_\omega\}$ B_0-meßbar ist und, daß jedes $f \in L_1(m)$ für m_0-fastalle ω zu $L_1(m_\omega)$ gehört.

Sei nun T ein stetiger linearer Operator in $L_1(m)$. $L_1(m)$ ist durch $f \to f\psi\varphi$ isomorph mit $K(\hat{m})$ und der Isomorphismus $\varrho = \psi\varphi$ induziert einen stetigen linearen Operator $\hat{T} = \varrho^{-1} T \varrho$ in $K(\hat{m})$. Da auch $\hat{T}$ umgekehrt T bestimmt, heißt $\hat{T}$ die zu m gehörige *Darstellung* von T.

Eine Schar $\{T_\omega, \omega \in \Omega\}$ von stetigen linearen Operatoren T_ω in $L_1'(m_\omega)$ heißt eine zu $\hat{m}$ gehörige *Zerlegung* von T, wenn:

(a) $(p_\omega T_\omega)(F)$ für jedes $F \in B$ und jedes $\hat{p} \in K(\hat{m})$ eine B_0-meßbare Funktion ist, und

(b) für jedes $\hat{p} \in (\hat{m})$ die Gleichung

$$(\hat{p}\hat{T})_\omega = p_\omega T_\omega \tag{10.4}$$

m_0-fastüberall gilt.

Die Forderung (b) ist sinnvoll, weil p_ω für m_0-fastalle ω zu $L_1'(m_\omega)$ gehört. Jacobs [10] hat gezeigt, daß bei gegebenem T und $\hat{m}$ die Schar $\{T_\omega\}$ m_0-fasteindeutig durch (a) und (b) bestimmt ist. Der folgende Satz garantiert unter einschränkenden Bedingungen die Existenz:

SATZ 10.1. *Sei (Ω, B, m) ein σ-endlicher Maßraum, B abzählbar erzeugt und $B_0 \subseteq B$, ferner $\hat{m}$ eine Zerlegung von m nach B_0. Ist dann T ein stetiger linearer Operator in $L_1(m)$ und sind alle Mengen $G \in B_0$ schwach T-invariant, so existiert eine zu $\hat{m}$ gehörige Zerlegung $\hat{T} = \{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ mit $\|T_\omega\| \leqq \|T\|$.*

BEWEIS. Sei R die Menge der komplexen Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil, K_0 ein abzählbarer B erzeugender Mengenkörper, dessen Mengen X endliches Maß $m(X)$ haben, und $L_R = \{f = \sum_{j=1}^n a_i \chi_{A_i},\ a_i \in R,\ A_i \in K_0\}$. Der Raum L_R ist dann ein in $L_1(m)$ dichter linearer Raum mit Skalarbereich R und er enthält nur abzählbar viele Elemente. Für m_0-fastalle ω haben alle $X \in K_0$ endliches Maß $m_\omega(X)$ und für diese liegt L_R auch dicht in $L_1(m_\omega)$.

Zu $f \in L_R$ suchen wir $\hat{p} = f\varrho$, sodaß m_0-fastüberall $dp_\omega = f\, dm_\omega$ gilt. Ist dann $\hat{q} = \hat{p}\hat{T}$, so ist $\hat{q} = f\varrho\varrho^{-1}T\varrho = fT\varrho$ und also $dq_\omega = (fT)dm_\omega$ m_0-fastüberall. Da nur abzählbar viele $\hat{p}$ und $\hat{q}$ so gebildet sind, können wir durch Elimination einer Nullmenge $N \in B_0$ dafür sorgen, daß für $\omega \notin N$

$$dp_\omega = f\, dm_\omega \quad \text{und} \quad dq_\omega = (fT)\, dm_\omega$$

gilt. Die Abbildungen $T_\omega : p_\omega \to q_\omega$ sind dann für $\omega \notin N$ linear mit dem Skalarbereich R. Da $\hat{m}$ B_0-meßbar ist, ist $\hat{q}$ B_0-meßbar. Ist nun $G \in B_0$, so sind nach Lemma 10.1 G und $\Omega - G$ schwach-$|T|$-invariant. Anwendung der Formel (10.3) ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\int_G \|q_\omega\| m_0(d\omega) &= \int_G \left(\int_\Omega |fT|\, dm_\omega \right) m_0(d\omega) \\
&= \int_G |fT|\, dm \\
&\leqq \int_G |f|\,|T|\, dm \\
&= \int_G (|f|\chi_G)|T|\, dm + \int_G (|f|\chi_{\Omega-G})|T|\, dm \\
&\leqq \int_\Omega (\chi_G|f|)|T|\, dm + 0 \leqq \|\,|T|\,\| \int_G |f|\, dm \\
&= \|T\| \int_G \left(\int_\Omega |f|\, dm_\omega \right) m_0(d\omega) = \|T\| \int_G \|p_\omega\|\, m_0(d\omega)\,.
\end{aligned}$$

Außerhalb einer m_0-Nullmenge $N_1 \supseteq N$ ist nun $\|q_\omega\| \leqq \|T\| \|p_\omega\|$ und daher sind die T_ω normstetig mit der Schranke $\|T_\omega\| \leqq \|T\|$. Durch stetige Fortsetzung erhält man T_ω als stetige lineare Operatoren in $L_1'(m_\omega)$ für $\omega \notin N_1$. Für $\omega \in N_1$ sei zum Beispiel $p_\omega T_\omega = 0$, $p_\omega \in L_1'(m_\omega)$.

(10.4) ist für $\omega \notin N_1$ und $\hat{p} \in L_R\varrho$ nach Konstruktion erfüllt. Sei nun $f \in L_1(m)$ und $\hat{p} = f\varrho = \{p_\omega\}$ fest, also außerhalb einer m_0-Nullmenge $dp_\omega = f\, dm_\omega$, und sei $f_k \in L_R$ eine Folge mit $\|f_k - f\| \to 0$, ferner $\hat{p}_k = \{p_{k\omega}\} = f_k\varrho$. Wegen der Stetigkeit der T_ω gilt dann

$$\int_\Omega \|p_\omega T_\omega - p_{k\omega} T_\omega\|\, m_0(d\omega) \leqq \|T\| \int_\Omega \|p_\omega - p_{k\omega}\|\, m_0(d\omega)$$
$$= \|T\| \|f - f_k\| \to 0 .$$

Andererseits gilt

$$\int_\Omega \|(\hat{p}\hat{T})_\omega - p_{k\omega} T_\omega\|\, m_0(d\omega) = \int_\Omega \left(\int_\Omega |fT - f_k T|\, dm_\omega \right) m_0(d\omega) \to 0 ,$$

da für die f_k (10.4) bereits gilt. Es folgt, daß m_0-fastüberall $p_\omega T_\omega = (\hat{p}\hat{T})_\omega$ ist.

Jacobs [10] hat Satz 10.1 bereits für den reellen $L_1(m)$ und $T \geqq 0$ bewiesen.

Sei ψ_ω der Isomorphismus $L_1(m_\omega) \to L_1'(m_\omega)$. Die Operatoren $\psi_\omega T_\omega \psi_\omega^{-1}$, $\psi_\omega |T_\omega| \psi_\omega^{-1}$ in $L_1(m_\omega)$ identifizieren wir mit T_ω, $|T_\omega|$ usw.

Lemma 10.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 10.1 *seien* $\hat{T} = \{T_\omega\}$ *und* $|\hat{T}| = \{|T|_\omega\}$ *Zerlegungen von* T *und* $|T|$. *Dann gilt für* m_0*-fastalle* $\omega \in \Omega$

$$|T|_\omega = |T_\omega| ,$$

d. h. es ist

(10.5) $$f|T_\omega| = f|T|_\omega \qquad \text{für } f \in L_1(m_\omega) .$$

Beweis. Abgesehen von einer m_0-Nullmenge N gilt für alle ω, daß $L_R \subseteqq L_1(m_\omega)$ und darin dicht. Aufgrund der Stetigkeit und Linearität der $|T_\omega|$ und $|T|_\omega$ genügt es also (10.5) für $f \in L_R{}^+$ zu zeigen. Außerhalb einer Nullmenge $N_2 \supseteq N$ ist $fT_\omega = fT$ und $f|T|_\omega = f|T|$. Es ist

$$f|T_\omega| = \lim Q^{(\sim)}(Z(f), T_\omega) .$$

Da $L_R{}^+$ dicht in $L_1{}^+(m_\omega)$ liegt, beschränken wir uns auf Zerlegungen $Z(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ mit $f_i \in L_R{}^+$. Für sie ist außerhalb von N_2

$$Q^{(\sim)}(Z(f), T_\omega) = \sum_{i=1}^{k} |f_i T_\omega| = \sum_{i=1}^{k} |f_i T| = Q^{(\sim)}(Z(f), T)$$

und daher $f|T_\omega| = f|T| = f|T|_\omega$.

Wir nennen nun eine Zerlegung $T=\{T_\omega\}$ *ergodisch*, wenn m_0-fastalle (T_ω, m_ω) ergodisch sind.

SATZ 10.2. *Sei (Ω, B, m) ein σ-endlicher Maßraum mit der Eigenschaft $(\hat{B})$ und B abzählbar erzeugt, $T \neq 0$ sei ein linearer stetiger Operator in $L_1(m)$ und $C(T)=\Omega$. Sei $B_0=B_1$ der σ-Körper der T-invarianten Mengen und $\hat{m}$ eine Zerlegung von m bzgl. B_0. Der Raum (Ω, B_0, m) sei σ-endlich. Die m_0-fasteindeutig bestimmte zu $\hat{m}$ gehörige Zerlegung $\hat{T}=\{T_\omega\}$ von T ist dann ergodisch.*

BEWEIS. Satz 10.2 ist für den reellen Fall und positives T mit $\|T\|=1$ und endliches Maß m von Jacobs [10] bewiesen worden, der auch gezeigt hat, wie der Fall von σ-endlichem Maß durch Isomorphieüberlegungen auf den Fall endlichen Maßes m reduzierbar ist. Im komplexen Fall ist der Beweis fast wörtlich übertragbar. Die Bedingung $\|T\|=1$ erweist sich durch die abgeänderte Definition von $C(T)$ als unwesentlich: Ist $\|T\| \neq 1$, so bildet man $\mathfrak{T}=T/\|T\|$. Da $\{T_\omega\}=\{\|T\|\mathfrak{T}_\omega\}$ ist, ist $\{T_\omega\}$ genau dann ergodisch, wenn $\{\mathfrak{T}_\omega\}$ ergodisch ist. Die Positivitätsannahme für T schließlich wird durch Lemma 10.2 überflüssig, denn aus der Ergodizität von $\{|T|_\omega\}$ folgt die von $\{T_\omega\}$, da m_0-fastüberall $|T|_\omega = |T_\omega|$ ist und T_ω nach Lemma 10.1 die gleichen invarianten Mengen besitzt wie $|T_\omega|$.

LITERATUR

1. G. Birkhoff, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 25), New York, 1948.
2. N. Bourbaki, *Integration* IV, (Act. Sci. Ind. 1175) Paris, 1952.
3. R. V. Chacon, *Identification of the limit of operator averages*, J. Math. Mech. 11 (1962), 961–968.
4. R. V. Chacon, *Convergence of operator averages*, erscheint noch.
5. R. V. Chacon and U. Krengel, *Linear modulus of a linear operator*, Proc. Amer. Math. Soc., erscheint noch.
6. R. V. Chacon and D. S. Ornstein: *A general ergodic theorem*, Illinois J. Math. 4 (1960), 153–160.
7. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators* I, *General theory*, New York, 1958.
8. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Convergence almost everywhere of operator-averages*, J. Math. Mech. 5 (1956), 129–178.
9. K. Jacobs, *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie* (Ergebn. Math. Grenzgebiete, Neue Folge 29), Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1960.
10. K. Jacobs, *Ergodische Zerlegungen positiver Kontraktionen*, unveröffentlichtes Manuskript, enthalten in:
11. K. Jacobs, *Lectures on ergodic theory*, Vorlesungsausarbeitung, Aarhus, 1963.
12. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 523–537.

13. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract* (M)*-spaces*, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 994–1023.
14. L. Kantorovitch, *Linear operations in semi-ordered spaces*, Mat. Sbornik 49 (1940), 209–284.
15. M. A. Neumark, *Normierte Algebren*, Berlin, 1959.
16. F. Riesz, *Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires*, Ann. of Math. (2) 41 (1940), 174–206.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND
UND
UNIVERSITÄT AARHUS, DÄNEMARK

FR. BAGGES KGL. HOFBOGTRYKKERI
KØBENHAVN

LEBENSLAUF

Ich wurde am 9.3.1937 in Deutsch-Eylau, Kr. Rosenberg, Westpreußen, als dritter von vier Söhnen des Rechtsanwalts und Notars Johannes Krengel und seiner Ehefrau Christa, geb. Stern, geboren. Von 1947-1956 besuchte ich den naturwissenschaftlich-neusprachlichen Zweig der Oberschule für Jugend in Hann. Münden und begann nach der Reifeprüfung im SS 1956 in Göttingen Mathematik, Physik und Chemie zu studieren. Nach dem im November 1959 abgelegten Philosophicum studierte ich zwei Semester lang in München, dann wieder in Göttingen. Im November 1961 legte ich das Staatsexamen in Mathematik und Physik ab, im Januar 1962 eine Ergänzungsprüfung in Chemie. Das Thema der Staatsexamensarbeit hieß: Über perfekte Maße. Während meiner Arbeit an der Dissertation verbrachte ich vom September 1962 bis zum April 1963 einen Stipendienaufenthalt an der Universität Aarhus.

Ulrich Krengel

FR. BAGGES KGL. HOFBOGTRYKKERI
KØBENHAVN